

Das Mindingsche Problem der Raumflächen

Diplomarbeit von
Rainer Rosenzweig

Betreuer:
Prof. Dr. G. Martens

Universität Erlangen – Nürnberg
Mathematisches Institut
Juli 1995

Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit entwickelte sich im Anschluß an eine Einführungsvorlesung in das klassische Gebiet der Differentialgeometrie von Prof. Dr. Martens im Wintersemester 1993/94 an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Das Thema “Das Mindingsche Problem der Raumflächen” befaßt sich mit der Frage, wie man feststellen kann, ob es zwischen zwei beliebigen gegebenen Flächenstücken eine lokale Isometrie gibt. Das Problem wurde 1839/40 von dem preußischen Mathematiker Minding aufgegriffen und gelöst. Später hat dann Bonnet die Bedingungen der Isometrie geometrisch entwickelt, indem er die Beltramischen Differentiatoren heranzog.

In dieser Arbeit findet sich eine kompakte Darstellung des Mindingschen Problems und seines Lösungsganges, die diese Entwicklung berücksichtigt. Dabei wurde darauf geachtet, innerhalb der Arbeit die Notation konsistent zu wählen, wobei sich die gewählte Nomenklatur an die in [5] benutzte anlehnt.

In Kap. 1 werden nach historischen Vorbemerkungen die für diese Arbeit wichtigen Begriffe und Sätze eingeführt. Kap. 2 befaßt sich mit der Lösung des Mindingschen Problems für Flächen mit konstanter Gaußscher Krümmung (Mindingsches Theorem), während Kap. 3 dann nach Vorbemerkungen in 3.1 und der Entwicklung einiger technischer Hilfsmittel in 3.2 sich der allgemeinen Lösung des Mindingschen Problems für Flächen mit nichtkonstanten Gaußschen Krümmungen in Abschnitt 3.3 widmet.

Wer sich nur grob für das Vorgehen interessiert, dem sei empfohlen, die Abschnitte 1.3, 3.1.2 (insbesondere das Schema auf S. 31) und dann 3.3 zu lesen. Sie dienen sozusagen als Leitfaden durch diese Arbeit.

Danken möchte ich dem Betreuer dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr. Martens, der mir mit vielen wertvollen Anregungen beiseite stand und durch konstruktive Kritik Inhalt und Form der vorliegenden Arbeit bereichert hat.

Nürnberg, Juli 1995

Rainer Rosenzweig

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 4 |
| 1.1 | Historisches | 4 |
| 1.2 | Voraussetzungen | 5 |
| 1.2.1 | Raumflächen | 5 |
| 1.2.2 | Lokale Isometrie | 6 |
| 1.2.3 | Christoffel-Symbole | 7 |
| 1.2.4 | Gaußsche Krümmung | 8 |
| 1.2.5 | Kovariante Ableitung | 10 |
| 1.2.6 | Differentialgleichung der Geodätischen | 11 |
| 1.3 | Formulierung des Mindingschen Problems | 12 |
| 2 | Flächen konstanter Krümmung | 14 |
| 2.1 | Exponentialabbildung und Koordinatensysteme | 14 |
| 2.1.1 | Exponentialabbildung | 14 |
| 2.1.2 | Normalkoordinaten | 16 |
| 2.1.3 | Geodätische Polarkoordinaten | 16 |
| 2.1.4 | Die 1. Fundamentalform unter geodätischen Polarkoordinaten | 17 |
| 2.2 | Lokale Isometrie von Flächen konstanter Krümmung | 19 |
| 2.2.1 | Krümmung K in Abhängigkeit von G | 19 |
| 2.2.2 | Das Mindingsche Theorem | 19 |
| 2.3 | Beispiele für Flächen konstanter Krümmung | 21 |
| 2.3.1 | Flächen verschwindender Krümmung $K \equiv 0$: | 21 |
| 2.3.2 | Positive Krümmung $K \equiv \frac{1}{R^2} > 0$: | 21 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.3.3 | Negative Krümmung $K \equiv -\frac{1}{R^2} < 0$: | 23 |
| 3 | Lokale Isometrie allgemeiner Flächen | 27 |
| 3.1 | Problemstellung | 27 |
| 3.1.1 | Gegenbeispiel | 27 |
| 3.1.2 | Vorgehensskizze | 29 |
| 3.2 | Technische Hilfsmittel | 32 |
| 3.2.1 | Beltrami-Differentiatoren | 32 |
| 3.2.2 | Isotherme Parameter | 35 |
| 3.2.3 | Beltrami-Differentiatoren in isothermen Parametern | 38 |
| 3.3 | Prüfung der lokalen Isometrie | 45 |

1 Einleitung

1.1 Historisches

Ernst Ferdinand Adolf *Minding* wurde am 23. Januar 1806 in der damals zu Preußen gehörigen Stadt Kalisch (heute: Polen) als Sohn des preußischen Stadtgerichtsassessors Gottlieb Minding geboren. Er studierte Philologie, Philosophie und Physik in Halle und Berlin. Auf mathematischem Gebiet war er ein Autodidakt.

Ab 1827 unterrichtete Minding an verschiedenen Gymnasien, promovierte 1829 in Halle mit einer mathematischen Arbeit über Doppelintegrale und lehrte dann von 1831 bis 1843 an der Berliner Universität und an der dortigen Bauschule. 1843 wurde Minding als Professor für Mathematik an die Universität Dorpat (Estland) berufen und wirkte dort bis 1883. Zwei Jahre nach seiner Emeritierung starb er am 13. Mai 1885 (vgl. [9], [12] und [23]).

Mindings bedeutsamste Leistung betrifft die klassische Differentialgeometrie (der Raumflächen), die er in der Dekade nach Erscheinen von Gauß' Grundlagenwerk "Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1828) maßgeblich beeinflusste. Die erste veröffentlichte Betrachtung des heutzutage mit dem Namen "geodätische Krümmung einer Flächenkurve" belegten Ausdrucks dürfte von ihm ([13]) stammen (die Bezeichnung "geodätische Krümmung" stammt allerdings von Bonnet¹ 1848).

In seinem differentialgeometrischen Hauptwerk ([14], [15]) über die Abwickelbarkeit zweier Flächen findet sich auch eine Typifizierung der Drehflächen konstanter negativer Gaußscher Krümmung: Mindingsche Spule, Mindingscher Kreisel, Pseudosphäre ([14] S. 376-380, vgl. auch S. 25 in der vorliegenden Arbeit). 1840 studierte er die Trigonometrie auf diesen Flächen. Er gab so eine Realisierung der hyperbolischen Ebenengeometrie als Geometrie der Geodätischen auf Flächen konstanter negativer Krümmung (ohne diese Zusammenhänge allerdings weiter zu beachten, die dann erst von Beltrami² (1868) ausgearbeitet wurden). Ein vollständiger Überblick über Mindings Arbeiten findet sich bei [12] S. 126-128.

Als 32-jähriger beschäftigte Minding sich ausführlich (4 Veröffentlichungen) mit dem Problem der "aufeinander abwickelbaren" (d.h. lokal isometrischen) Flächen. Er fand als erster ein Verfahren, das zu entscheiden gestattet, ob es eine lokale Isometrie zwischen zwei beliebigen gegebenen glatten Raumflächen gibt, ohne

¹Pierre Ossian Bonnet (1819-1892)

²Eugenio Beltrami (1835-1900)

“... alle Biegungen einer jener Flächen zu kennen, um etwa dann zu entscheiden, ob die zweite unter diesen enthalten ist oder nicht.”³. So zeigte er zunächst unter Benutzung geodätischer Polarkoordinaten, daß Flächen gleicher konstanter Krümmung (lokal) isometrisch aufeinander bezogen werden können ([14] S. 374f) und wandte sich dann den Flächen nichtkonstanter Krümmung zu ([14] S. 380ff). Dieser Ansatz soll in der vorliegenden Arbeit dargestellt werden.

1.2 Voraussetzungen

Die Grundlage dieser Arbeit bildet eine einsemestrige Einführungsvorlesung in das klassische Gebiet der Differentialgeometrie der Raumflächen, wie sie etwa in [5] bis einschließlich Kap. 4.5 nachzulesen ist.

Einige für diese Arbeit grundlegende Begriffe und Sätze sollen im folgenden zusammengestellt werden:

1.2.1 Raumflächen

Definition

1. Ein *glattes Flächenstück* ist eine Abbildung $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet) mit:
 - (a) x ist differenzierbar⁴,
 - (b) x ist ein Homöomorphismus aufs Bild,
 - (c) für alle $q \in U$ ist das Differential $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv.
2. Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt eine *glatte Raumfläche*, wenn es zu jedem Punkt $p \in S$ ein glattes Flächenstück $x_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit:

$$p \in x_p(U_p) \subseteq S \quad \text{und} \quad x_p : U_p \rightarrow S \text{ ist eine offene Abbildung.}$$

x_p heißt dann eine *Parametrisierung* von S (im Punkt p).

Mit $T_p(S)$ bzw. $N_p(S)$ wird die Tangentialebene bzw. die Normale der Fläche S bezeichnet.

³zitiert aus [14], (Einleitung); man bezeichnet die im Zitat angesprochene Fragestellung als das Boursche Problem (vgl. [20] Nr. 18 S. 395ff)

⁴gemeint ist immer: ∞ oft!

1.2.2 Lokale Isometrie

Definition

Seien S und \bar{S} glatte Raumflächen.

1. Ein Diffeomorphismus $\phi : S \rightarrow \bar{S}$ heißt *Isometrie*, wenn für alle $p \in S$ und alle $\omega_1, \omega_2 \in T_p(S)$ gilt:

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_p = \langle d\phi_p(\omega_1), d\phi_p(\omega_2) \rangle_{\phi(p)}$$

2. Eine Abbildung $\phi : V \rightarrow \bar{S}$ einer offenen Umgebung V von $p \in S$ heißt *lokale Isometrie* zwischen S und \bar{S} (bei p), wenn es eine Umgebung \bar{V} von $\phi(p) \in \bar{S}$ gibt, so daß $\phi : V \rightarrow \bar{V}$ eine Isometrie ist.
3. Gibt es zu jedem $p \in S$ eine lokale Isometrie zwischen S und \bar{S} (bei p), so heißt die Fläche S *lokal isometrisch zu \bar{S}* .
4. S und \bar{S} heißen *lokal isometrisch* oder *aufeinander abwickelbar*, wenn S lokal isometrisch zu \bar{S} und \bar{S} lokal isometrisch zu S ist.

Bezeichnung:

Eine unter lokalen Isometrien invariante Größe nennt man kurz *biegungsinvariant*.

Offenbar gilt das folgende Kriterium (vgl. [5] S. 166, Prop. 1):

Satz 1

Es gibt genau dann eine lokale Isometrie zwischen S und \bar{S} , wenn Parametrisierungen $x : U \rightarrow S$ von S und $\bar{x} : U \rightarrow \bar{S}$ von \bar{S} existieren, so daß in U gilt:

$$E \equiv \bar{E}, \quad F \equiv \bar{F}, \quad G \equiv \bar{G}.$$

(E, F, G bzw. $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ sind die Koeffizienten der 1. Fundamentalform von S bzw. \bar{S} in U .) \square

Satz 1 besagt, daß S und \bar{S} genau dann lokal isometrisch sind, wenn sie (überall lokal) dieselbe "innere Geometrie" besitzen. Wegen des lokalen Charakters genügt es häufig, glatte Flächenstücke zu betrachten.

Um einige Begriffe als Biegungsinvarianten, also Invarianten der inneren Geometrie, zu erkennen, wird als nächstes an die Definition der Christoffel-Symbole erinnert:

1.2.3 Christoffel-Symbole

Definition

Sei $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes Flächenstück und (x_u, x_v, N) das “kanonische Dreibein” von x (dabei ist $N = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}$).

Die *Christoffel-Symbole* Γ_{ij}^k (2.Art) der Parametrisierung x mit $i, j, k \in \{1, 2\}$ werden definiert durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + e N \\ x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + f N \\ x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + f N \\ x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + g N \end{aligned} \quad (1)$$

(e, f, g sind die Koeffizienten der 2. Fundamentalform.)

Wegen $x_{uv} = x_{vu}$ gilt $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ und $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$, die dritte Gleichung ist daher überflüssig.

Satz 2

Alle Begriffe, die sich in Termen der Christoffel-Symbole (sowie der Koeffizienten der 1. Fundamentalform) ausdrücken lassen, sind biegungsinvariant.

Beweis:

Die Aussage erhält man aus den folgenden (bekannten) Gleichungen (vgl. [5] S. 176), die zeigen, daß die Christoffel-Symbole durch die Koeffizienten der 1. Fundamentalform (und deren Ableitungen) ausgedrückt werden können und daher Bestandteil der inneren Geometrie sind:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle x_{uu}, x_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle x_{uv}, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle x_{vv}, x_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle x_{vv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \quad \square \end{aligned} \quad (2)$$

⁵Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)

1.2.4 Gaußsche Krümmung

Aufgrund der Gaußschen Formel (vgl. [5] S. 178) für die Gaußsche Krümmung:

$$K = \frac{1}{E}((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2)$$

impliziert Satz 2:

Satz 3 (Theorema Egregium von Gauß⁶)

Die Gaußsche Krümmung K einer Fläche ist biegungsinvariant.

Dieser Satz bildet einen fundamentalen Baustein der klassischen Differentialgeometrie und wird auch in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen.

Eine weitere Folgerung aus der Gaußschen Formel ist:

Satz 4 (Krümmungsformel von Frobenius⁷)

In einer orthogonalen Parametrisierung (d.h.: $F \equiv 0$) gilt für die Gaußsche Krümmung K die Identität:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right).$$

Beweis:

Mit den Formeln (2) aus dem Beweis von Satz 2 folgt (man beachte dabei $F = 0$, also $E, G \neq 0$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E} \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v}{2G} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G} \\ (\Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u}{2E}) \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G} \end{aligned}$$

⁶Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

⁷Georg Ferdinand Frobenius (1849-1917)

$$\begin{aligned}\implies (\Gamma_{11}^2)_v &= \left(-\frac{E_v}{2G}\right)_v = -\frac{E_{vv}}{2G} + \frac{2E_v G_v}{4G^2} \\ (\Gamma_{12}^2)_u &= \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u = \frac{G_{uu}}{2G} - \frac{2G_u^2}{4G^2}\end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{E} \left(-\frac{E_{vv}}{2G} + \frac{2E_v G_v}{4G^2} - \frac{G_{uu}}{2G} + \frac{2G_u^2}{4G^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_v}{2E} \frac{E_v}{2G} - \left(\frac{G_u}{2G}\right)^2 - \frac{E_v}{2G} \frac{G_v}{2G} + \frac{E_u}{2E} \frac{G_u}{2G} \right) = \\ &= -\frac{E_{vv} + G_{uu}}{2EG} + \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} + \frac{E_v^2 + E_u G_u}{4E^2 G}. \quad (*)\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\sqrt{EG} E_{vv} - E_v \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v G + E G_v)}{EG} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{EG} G_{uu} - G_u \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_u G + E G_u)}{EG} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{1}{EG} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (2EG E_{vv} - E_v^2 G - E E_v G_v + \\ &\quad + 2EG G_{uu} - E_u G_u G - E G_u^2) = \\ &= -\frac{E_{vv} + G_{uu}}{2EG} + \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} + \frac{E_v^2 + E_u G_u}{4E^2 G}. \quad (*)\end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke (*) folgt die Behauptung. \square

1.2.5 Kovariante Ableitung

Definition

1. Sei $\alpha : I \rightarrow S$ eine (parametrisierte) Kurve auf der glatten Raumfläche S . Eine differenzierbare Funktion $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt ein (differenzierbares, tangentiales) *Vektorfeld längs der Kurve α* , wenn $w(t) \in T_{\alpha(t)}(S) \forall t \in I$.
2. Die Projektion der Ableitung $w'(t) \in \mathbb{R}^3$ auf $T_{\alpha(t)}(S)$ längs $N_{\alpha(t)}(S)$ heißt die *kovariante Ableitung* von w längs α (an der Stelle t) und wird mit $Dw(t)$ bezeichnet.
3. $w(t)$ heißt *parallel*, wenn

$$Dw(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad (\text{d.h. } w'(t) \in N_{\alpha(t)}(S) \quad \forall t \in I).$$

Satz 5

Die kovariante Ableitung ist biegungsinvariant.

Beweis:

Bzgl. einer lokalen Parametrisierung x von S bei p sei:

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)),$$

$$w(t) = a(u(t), v(t))x_u + b(u(t), v(t))x_v = a(t)x_u + b(t)x_v$$

Dann gilt (Ableitung nach t):

$$w' = a(x_{uu}u' + x_{uv}v') + b(x_{vu}u' + x_{vv}v') + a'x_u + b'x_v.$$

Die Orthogonalprojektion von x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} auf $T_p(S)$ wird durch die jeweiligen ersten Summanden in (1) gegeben. Es folgt:

$$\begin{aligned} Dw(t) = & (a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v')x_u \\ & + (b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v')x_v. \end{aligned} \quad (3)$$

Somit ist die kovariante Ableitung Dw nach Satz 2 biegungsinvariant. \square

1.2.6 Differentialgleichung der Geodätischen

Sei $\gamma : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve auf S in einer Parameterumgebung $V \subseteq S$ und $x(u(t), v(t))$ die Darstellung von γ in der lokalen Parametrisierung $x : U \rightarrow V$ der Fläche S .

Dann ist das Tangentenvektorfeld $\gamma'(t) =: w$ ($t \in I$) längs γ gegeben durch:

$$w = u'x_u + v'x_v$$

Definition

γ heißt eine *parametrisierte Geodätische*, wenn w parallel ist, wenn also die “Beschleunigung von γ längs S ” verschwindet:

$$Dw(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Äquivalent dazu ist nach (3) mit $a = u'$, $b = v'$ das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Nach Satz 2 gehört somit der Begriff der “Geodätischen” der inneren Geometrie an.

Aus der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung folgt sofort:

Korollar 6 (Eindeutigkeit der Geodätischen)

Sei $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung der glatten Raumfläche S , $p \in S$ und $0 \neq \omega \in T_p(S)$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte parametrisierte Geodätische $\gamma = \gamma_{p,\omega} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ mit:

$$\gamma(0) = p, \quad \text{und} \quad \gamma'(0) = \omega \quad \square$$

Bemerkung

Nach dem Korollar ist (eindeutig) die lokale Geodätische *durch p in Richtung ω* definiert, denn für ein $\xi := \lambda\omega$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ist die parametrisierte Geodätische $\gamma_{p,\xi}$ mit $\gamma_{p,\xi}(0) = p$, $\gamma'_{p,\xi}(0) = \xi$ nichts anderes als das durch die zulässige Parametertransformation $h :]-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}[\rightarrow]-\varepsilon, \varepsilon[$, $h(t) := \lambda t$, unparametrisierte $\gamma_{p,\omega}$, d.h. es gilt:

$$\gamma_{p,\lambda\omega}(t) = \gamma_{p,\omega}(\lambda t).$$

1.3 Formulierung des Mindingschen Problems

Das Problem von Minding lautet wie folgt:

Wie entscheidet man, ob es eine lokale Isometrie zwischen zwei glatten Raumflächen gibt oder nicht?

Dabei genügt es offenbar, ein Verfahren zu finden, mit dem man in der Lage ist zu entscheiden, ob eine lokale Isometrie zwischen zwei gegebenen glatten Flächenstücken $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ existiert. Da x und \bar{x} i.a. verschiedene Parameterbereiche U bzw. \bar{U} haben, kann man in diesem Fall nicht auf Satz 1 zurückgreifen.

Mindings Ansatz zur Lösung des Problems, der in dieser Arbeit dargestellt werden soll, ist folgender:

Eine notwendige Bedingung für eine lokale Isometrie zwischen $S := x(U)$ und $\bar{S} := \bar{x}(\bar{U})$ ist nach dem Theorema Egregium (Satz 3) die Gleichheit der Gaußschen Krümmungen K und \bar{K} . Im Falle konstanter Krümmungen wird sich dieses Kriterium in Kap. 2 nach dem Theorem von Minding (Satz 10) sogar als hinreichend erweisen, und es ist eine "globale" Lösung des Problems möglich: S ist (überall) abwickelbar auf \bar{S} .

In Kap. 3 wird dann der (allgemeinere) Fall nichtkonstanter Krümmungen behandelt. Ziel ist es, eine lokale Parametertransformation $\tau : U_0 \rightarrow \bar{U}$ auf einer Umgebung $U_0 \subseteq U$ zu finden, so daß Satz 1 auf die lokalen Parametrisierungen $x|_{U_0}$ (von S) und $\bar{x} \circ \tau$ (von \bar{S}) angewandt werden kann, also

$$E \equiv \bar{E}, \quad F \equiv \bar{F}, \quad G \equiv \bar{G} \tag{5}$$

in U_0 gilt. Um diese Parametertransformation τ zu ermitteln, versuche man durch Heranziehen einer weiteren Biegungsinvarianten L lokal die Gleichheit der Gaußschen Krümmungen zu einer hinreichenden Bedingung aufzuwerten. Dabei betrachte man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K(u, v) &= \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \text{(ii)} \quad L(u, v) &= \bar{L}(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned} \tag{6}$$

$((u, v) \in U, (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U})$ in der Nähe eines Punktes $(u_0, v_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0) \in U \times \bar{U}$, in dem die Identitäten (i) und (ii) erfüllt sind. Nach dem Satz über implizite Funktionen (vgl. [7], S. 71) kann man unter der (hinreichenden) Bedingung

$$\left| \frac{\partial(\bar{K}, \bar{L})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \neq 0 \tag{7}$$

die Gleichungen (i) und (ii) nach \bar{u} bzw. \bar{v} lokal auflösen:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \tau(u, v) \quad \text{nahe} \quad (u_0, v_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0) \in U \times \bar{U}. \quad (8)$$

Die in Satz 1 für die lokale Isometrie notwendig und hinreichend geforderten Bedingungen (5) können also nahe (u_0, v_0) direkt nachgeprüft werden. Wegen der lokalen Eindeutigkeit von τ entscheidet diese Überprüfung dann, ob es eine lokale Isometrie zwischen S und \bar{S} bei $x(u_0, v_0)$ gibt.

Ist jedoch die Funktionalmatrix $\frac{\partial(\bar{K}, \bar{L})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ auf \bar{U} nicht invertierbar, d.h. gilt

$$\left| \frac{\partial(\bar{K}, \bar{L})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \equiv 0 \quad \text{auf } \bar{U}, \quad (9)$$

so ist \bar{L} eine Funktion von \bar{K} (siehe dazu [16] S. 217), die beiden Biegungsinvarianten sind also nicht unabhängig voneinander gewählt. In diesem Fall versuche man es mit einer anderen Biegungsinvarianten M statt L .

Die Frage, wie man konkret L bzw. M geschickt wählen kann, so daß dieses Verfahren schließlich zu einer Entscheidung führt, wird in Kapitel 3 dargestellt.

Das folgende Kapitel 2 ist den Flächen konstanter Krümmung gewidmet und mündet in das Theorem von Minding (Satz 10) als entscheidendes Resultat für die oben dargestellte Problemstellung im Falle konstanter Krümmungen. Dabei liegt [5] (Kap. 4.6 S. 219ff) zugrunde.

2 Flächen konstanter Krümmung

Sei S eine glatte Raumfläche.

2.1 Exponentialabbildung und Koordinatensysteme

Zur Einführung spezieller Koordinatensysteme definiert man die

2.1.1 Exponentialabbildung

Sei $0 \neq \omega \in T_p(S)$. Dann gibt es nach Korollar 6 (lokal) die eindeutige Geodätische $\gamma_{p,\omega}$ durch p in Richtung ω . Diese kann nach der Bogenlänge parametrisiert werden:

$$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow S, \quad \gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = \frac{\omega}{|\omega|}.$$

Ist $|\omega| < \varepsilon$, so ist $\gamma(|\omega|)$ definiert und man setzt:

Definition

$$\exp_p(\omega) := \gamma(|\omega|) \quad 0 \neq \omega \in T_p(S) \quad \text{und} \quad \exp_p(0) := p.$$

Diese derart (nicht notwendig auf ganz $T_p(S)$ definierte) Abbildung nennt man *Exponentialabbildung* \exp_p von S bei p .

Geometrische Interpretation:

Man trage längs der Geodätischen $\gamma_{p,\omega}$ durch p in Richtung ω ein Stück der Länge $|\omega|$ ab. Der so erhaltene Punkt wird mit $\exp_p(\omega)$ bezeichnet (siehe Abb. 1).

Satz 7

Für jedes $p \in S$ ist \exp_p hinreichend nahe um den Ursprung $0 \in T_p(S)$ definiert und ein Diffeomorphismus aufs Bild.

Der Beweis ist technischer Natur und findet sich beispielsweise in [5] (S. 220f). \square

Daß \exp_p nur lokal diffeomorph ist, zeigt das folgende Beispiel:

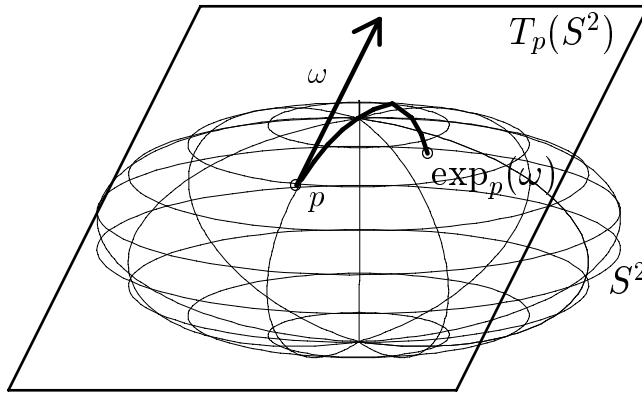


Abbildung 1: Die Exponentialfunktion $\exp_p(\omega)$ auf S^2

Beispiel:

Sei S^2 die Einheitssphäre, $p \in S^2$. Dann ist \exp_p sogar für alle $\omega \in T_p(S^2)$ definiert (siehe Abb. 1). Offensichtlich gilt in $T_p(S^2)$:

- Kreise vom Radius $(2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) werden auf den Antipodenpunkt von p abgebildet.
- Kreise vom Radius $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) werden auf p selbst abgebildet.
- Geraden durch p werden auf Großkreise durch p abgebildet.

Definition

Sei U eine Umgebung des Ursprungs in $T_p(S)$, so daß $\exp_p|_U$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Dann heißt $V := \exp_p(U) \subseteq S$ eine *Normalumgebung* (von p).

Da \exp_p auf der Normalumgebung V ein Diffeomorphismus ist, kann man mittels der Exponentialabbildung Koordinatensysteme auf der Fläche S einführen:

2.1.2 Normalkoordinaten

Sei nun $V \subseteq S$ eine Normalumgebung des Punktes $p \in S$ in $T_p(S)$. Wähle zwei orthogonale Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in T_p(S)$, $e_1 \perp e_2$.

Jedes $q \in V$ läßt sich nun darstellen als:

$$q = \exp_p(\omega) \quad \text{mit} \quad \omega = ue_1 + ve_2 \in U \subseteq T_p(S) \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

Da \exp_p ein Diffeomorphismus auf V ist, wird so eine Parametrisierung von S definiert. (u, v) heißen *Normalkoordinaten* von $q \in V$ zur Basis (e_1, e_2) von $T_p(S)$.

Eigenschaften:

- Die Geodätischen durch p sind genau die Bilder von Geraden auf $T_p(S)$ durch $0 \in T_p(S)$ unter \exp_p .
- Die Koeffizienten der 1. Fundamentalform in p sind in einem solchen System:

$$E(p) = G(p) = 1, \quad F(p) = 0 \quad (10)$$

2.1.3 Geodätische Polarkoordinaten

Wähle auf $T_p(S)$ Polarkoordinaten (ρ, θ) ($\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 2\pi$). Aus Stetigkeitsgründen sind die Polarkoordinaten (ρ, θ) auf der abgeschlossenen Halbgeraden l für $\theta = 0$ nicht definiert.

Sei $L := \exp_p(l)$. Dann ist $\exp_p : U \setminus l \rightarrow V \setminus L$ ebenfalls ein Diffeomorphismus, also wird $V \setminus L$ durch (ρ, θ) parametrisiert. (ρ, θ) heißen dann *geodätische Polarkoordinaten* oder *Gaußsche geodätische Koordinaten*.

Eigenschaften:

- Die Bilder unter $\exp_p : U \rightarrow V$ von Kreisen ($\rho = \text{const.}$) auf $T_p(S)$ mit Mittelpunkt $0 \in T_p(S)$ sind Geodätische auf der Fläche S .
Sie heißen *geodätische Kreislinien*.
- Die Bilder unter $\exp_p : U \rightarrow V$ von Geraden ($\theta = \text{const.}$) auf $T_p(S)$ durch $0 \in T_p(S)$ sind ebenfalls Geodätische auf S .
Sie heißen *radiale Geodätische*.

2.1.4 Die 1. Fundamentalform unter geodätischen Polarkoordinaten

Seien nun (ρ, θ) geodätische Polarkoordinaten der Fläche S im Punkt $p \in S$, $x : U \setminus l \rightarrow V \setminus L$ die Exponentialabbildung und (E, F, G) die zugehörigen Koeffizienten der 1. Fundamentalform.

Für alle $\theta =: \theta_0 = \text{const}$ ist die Kurve $x(\rho) := x(\rho, \theta_0)$ auf S nach der Bogenlänge parametrisiert, also

$$1 = \left| \frac{d}{d\rho} x(\rho) \right|^2 = \langle x_\rho, x_\rho \rangle^2 = E^2$$

Somit gilt für die Fläche S :

$$E \equiv 1 \quad \text{auf } U \setminus l.$$

Lemma 8 (Gauß)

Die Familie der geodätischen Kreislinien in einer Normalumgebung V eines Punktes p der Fläche S ist orthogonal zur Familie der radialen Geodätischen, d.h.:

$$F \equiv 0 \quad \text{auf } U \setminus l.$$

Beweis:

Die radiale Geodätische $\theta = \text{const}$ in die zweite DGL der Geodätischen (4) in 1.2.6 eingesetzt ergibt:

$$\Gamma_{11}^2 = 0.$$

Wegen $E = 1$ und der ersten Gleichung in (2) im Beweis von Satz 2 gilt:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} E_\rho = 0$$

und somit nach der zweiten Gleichung (2):

$$F_\rho = 0.$$

Also hängt F nicht von ρ ab.

Für jedes $q \in V$ bezeichne man nun die geodätische Kreislinie durch q mit $\alpha(\zeta)$, ($\zeta \in]0, 2\pi[$). Für $q = p$ ist $\alpha(\zeta)$ dann die konstante "Kurve" $\alpha(\zeta) \equiv p$. Die radiale Geodätische durch q sei mit $\beta(s)$ (s Bogenlänge von β) bezeichnet. Dann gilt:

$$F = \langle x_\rho, x_\theta \rangle = \left\langle \frac{d\alpha}{d\zeta}, \frac{d\beta}{ds} \right\rangle.$$

Konzentriert man sich nun auf eine radiale Geodätische $\theta = \text{const}$, so erhält man wegen $\alpha(\zeta) \equiv p$ in p , d.h. $\frac{d\alpha}{d\zeta} \equiv 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\alpha}{d\zeta}, \frac{d\beta}{ds} \right\rangle = 0 \quad \text{auf } U \setminus l.$$

Da aber F bereits unabhängig von ρ ist, folgt:

$$F \equiv 0 \quad \text{auf } U \setminus l. \quad \square$$

$G(p)$ ist nicht definiert. Im Limes kann man jedoch folgende Aussagen machen:

Lemma 9

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1 \quad \text{auf } U \setminus l$$

Beweis:

Wähle bei $p \in S$ ein System von Normalkoordinaten durch die Parametertransformation:

$$\bar{u} := \rho \cos \theta, \quad \bar{v} := \rho \sin \theta \quad (\rho \neq 0, \quad 0 < \theta < 2\pi).$$

Dann gilt:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \theta)} \right|,$$

wobei $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ die Koeffizienten der 1. Fundamentalform der Normalkoordinaten (\bar{u}, \bar{v}) sind, und $\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \theta)} \right|$ die Jacobi-Determinante des Koordinatenwechsels ist.

Wegen

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(\rho, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

erhält man (unter Verwendung der bisher erzielten Ergebnisse):

$$\sqrt{G} = \rho \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \quad (\rho \neq 0).$$

Nach (10) in Abschnitt 2.1.2 gilt nun im Punkt p : $\bar{E} = \bar{G} = 1$ und $\bar{F} = 0$.

Also:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1 \quad \square$$

2.2 Lokale Isometrie von Flächen konstanter Krümmung

Die Gaußsche Krümmung K der glatten Raumfläche S sei konstant und (ρ, θ) seien geodätische Polarkoordinaten auf S .

2.2.1 Krümmung K in Abhängigkeit von G

Nach der Frobeniusschen Krümmungsformel (Satz 4) gilt für $F \equiv 0$:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}} \right)_\theta + \left(\frac{G_\rho}{\sqrt{EG}} \right)_\rho \right)$$

Da auch $E \equiv 1$, folgt:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_\rho}{\sqrt{G}} \right)_\rho = -\frac{1}{\sqrt{G}} \underbrace{\left(\frac{G_\rho}{2\sqrt{G}} \right)_\rho}_{=(\sqrt{G})_\rho} = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$$

Man erhält also eine lineare Differentialgleichung mit dem konstanten Koeffizienten K :

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0 \quad (11)$$

Davon ausgehend kann nun der erste Schritt zur Lösung des Mindingschen Problems formuliert und bewiesen werden:

2.2.2 Das Mindingsche Theorem

Satz 10 (Minding):

Zwei glatte Raumflächen S und \bar{S} mit gleicher konstanter Gauß-Krümmung K sind lokal isometrisch.

Bemerkungen

1. Wie das (noch folgende) Beispiel in Abschnitt 3.1. zeigen wird, ist die Forderung der *konstanten* Krümmung unverzichtbar für dieses Theorem.
2. Haben zwei Flächen jeweils konstante Krümmungen K und \bar{K} , die *nicht* übereinstimmen, also $K \neq \bar{K}$, so können sie nach dem Theorema Egregium (Satz 3) auch nicht (lokal) isometrisch sein.

Beweis des Satzes:

Mit Hilfe der Differentialgleichung (11) und den Anfangsbedingungen aus Lemma 9 soll nun G für die Fläche S berechnet werden. Dazu werden die Fälle

$$K \equiv 0, \quad K \equiv \frac{1}{R^2} > 0 \quad \text{und} \quad K \equiv -\frac{1}{\tilde{R}^2} < 0$$

getrennt untersucht:

1. $K \equiv 0$:

Aus (11) ergibt sich $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0$. Somit hängt $(\sqrt{G})_{\rho}$ nicht von ρ ab. Nach Lemma 9 ist jedoch $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1$, also hat man $(\sqrt{G})_{\rho} \equiv 1$.

$\Rightarrow \sqrt{G} = \rho + z(\theta)$, wobei $z(\theta)$ eine Funktion von θ ist.

Wiederum aus Lemma 9 folgt $z(\theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$.

Somit gilt in diesem Fall:

$$\underline{E \equiv 1, \quad F \equiv 0, \quad G(\rho, \theta) = \rho^2.}$$

2. $K \equiv \frac{1}{R^2} > 0$:

Aus (11) erhält man nun die allgemeine Lösung (vgl. [11] S. 398, Nr. 2.9)

$$\sqrt{G} = A(\theta) \cos(\sqrt{K}\rho) + B(\theta) \sin(\sqrt{K}\rho),$$

wobei die Funktionen A und B nur von θ abhängen.

Aus $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ folgt sofort $A(\theta) \equiv 0$ und daher

$$\sqrt{G} = B(\theta) \sin(\sqrt{K}\rho).$$

Ableitung nach ρ ergibt

$$(\sqrt{G})_{\rho} = B(\theta) \sqrt{K} \cos(\sqrt{K}\rho)$$

und wegen $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho} = 1$ erhält man $B \equiv \frac{1}{\sqrt{K}}$, in diesem Fall also:

$$\underline{E \equiv 1, \quad F \equiv 0, \quad G(\rho, \theta) = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}\rho).}$$

3. $K \equiv -\frac{1}{\tilde{R}^2} < 0$:

Nun lautet die allgemeine Lösung von (11) (vgl. [11] S. 398, Nr. 2.9):

$$\sqrt{G} = \tilde{A}(\theta) \cosh(\sqrt{-K}\rho) + \tilde{B}(\theta) \sinh(\sqrt{-K}\rho),$$

wobei wieder die Funktionen \tilde{A} und \tilde{B} nur von θ abhängen.
 Aus $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ folgt wie unter 2. $\tilde{A}(\theta) \equiv 0$ und daher

$$\sqrt{G} = \tilde{B}(\theta) \sinh(\sqrt{-K} \rho).$$

Ableitung nach ρ ergibt

$$(\sqrt{G})_\rho = \tilde{B}(\theta) \sqrt{-K} \cosh(\sqrt{-K} \rho)$$

und wegen $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$ erhält man $\tilde{B} \equiv \frac{1}{\sqrt{-K}}$, schließlich für diesen letzten Fall:

$$\underline{E \equiv 1, \quad F \equiv 0, \quad G(\rho, \theta) = -\frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K} \rho).}$$

Für alle Punkte $p \in S$ und $\bar{p} \in \bar{S}$ gibt es also Parametrisierungen $x : U \rightarrow S$ von S und $\bar{x} : U \rightarrow \bar{S}$ von \bar{S} (nämlich genau die oben behandelten Systeme geodätischer Polarkoordinaten!), so daß nach den Ergebnissen aus 2.1.4 und der obigen Überlegung gilt:

$$E \equiv \bar{E} \quad (= 1), \quad F \equiv \bar{F} \quad (= 0) \quad \text{und} \quad G \equiv \bar{G}.$$

Mit Satz 1 folgt somit die lokale Isometrie der beiden Flächen S und \bar{S} . \square

2.3 Beispiele für Flächen konstanter Krümmung

2.3.1 Flächen verschwindender Krümmung $K \equiv 0$:

Das einfachste Beispiel einer Fläche der konstanten Krümmung 0 ist die Ebene $\mathbf{R}^2 \subseteq \mathbf{R}^3$.

Beachtet man nun, daß alle Punkte eines (beliebigen) Zylinders Z parabolisch sind, also $K_{Zylinder} \equiv 0$, so folgt aus dem Mindingschen Theorem (Satz 10) sofort, daß Ebene und Zylinder lokal isometrisch sind.

2.3.2 Positive Krümmung $K \equiv \frac{1}{R^2} > 0$:

Die Kugelsphäre mit Radius R hat die konstante Krümmung $\frac{1}{R^2}$:
 Eine (kanonische) Parametrisierung der Kugelsphäre ist

$$x(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi \right)^8.$$

⁸Durch Drehung des Koordinatensystems der Parameterlinien erhält man die noch fehlenden Punkte auf der Kugelsphäre

Die Gaußsche Krümmung K erhält man nach Berechnung der 1. und 2. Fundamentalform wie folgt:

$$x_\theta = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad x_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies E &= \langle x_\theta, x_\theta \rangle = R^2, \\ F &= \langle x_\theta, x_\varphi \rangle = 0, \\ G &= \langle x_\varphi, x_\varphi \rangle = R^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

$$x_\theta \times x_\varphi = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\implies |x_\theta \times x_\varphi|^2 = R^4 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + R^4 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = R^4 \sin^2 \theta$$

$$\implies N = \frac{x_\theta \times x_\varphi}{|x_\theta \times x_\varphi|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$x_{\theta\theta} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad x_{\theta\varphi} = R \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\varphi\varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies e &= \langle N, x_{\theta\theta} \rangle = R (-\sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta) = -R, \\ f &= \langle N, x_{\theta\varphi} \rangle = 0, \\ g &= \langle N, x_{\varphi\varphi} \rangle = R (-\sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) = -R \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Also:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{R^2 \sin^2 \theta}{R^4 \sin^2 \theta} = \frac{1}{R^2} \quad \square$$

2.3.3 Negative Krümmung $K \equiv -\frac{1}{R^2} < 0$:

Es fällt auf, daß die Beispiele in 2.3.1 und 2.3.2 als Flächen mit konstanten Krümmungen $K \geq 0$ global betrachtet abgeschlossene Mengen im \mathbb{R}^3 sind. Nach dem Theorem von Hilbert (z.B. in [17] S. 91, Original: [10]) ist dies für Flächen konstanter negativer Krümmung im \mathbb{R}^3 nicht erreichbar. Der Satz besagt, daß in diesem Fall Singularitäten auftreten müssen, wie auch das folgende Beispiel zeigt:

Eine Fläche mit konstanter negativer Krümmung ist die sogenannte *Pseudosphäre* P . Sie entsteht durch Rotation einer *Traktrix*⁹ T (s. Abb. 2).

Eine Parametrisierung der Traktrix T erhält man wie folgt:

Für einen Punkt $t := (x, z(x)) \in T$ gilt:

$$z'(x) = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}$$

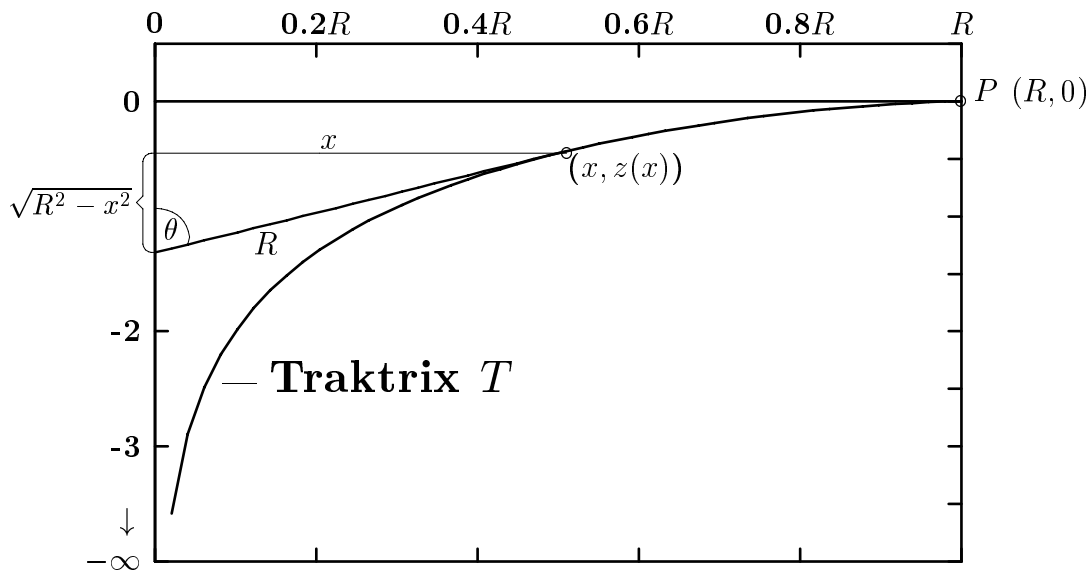


Abbildung 2: Die Traktrix T ist so definiert, daß der Abstand zwischen einem Punkt $(x, z(x)) \in T$ und der z -Achse längs der Tangente einen konstanten Wert R hat. (In der Abbildung ist der Maßstab verzerrt.)

⁹Auch *Hundelinie* genannt, da sie die Bahn beschreibt, der ein Hund (z.B. im Punkt P startend) folgen muß, um den Abstand zu einer verfolgten Katze, die längs der z -Achse entlang (nach "unten") rennt, beizubehalten.

Jedem Punkt $t \in T$ kann man wegen $0 < x < R$ einen Winkel $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (s. Abb. 2) zuordnen:

$$x =: R \sin \theta \quad (dx = R \cos \theta d\theta)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z(\theta) &= \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} R \cos \theta d\theta \stackrel{\text{(partielle Integration)}}{=} \\ &= R \left(\sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \int \sin \theta \frac{-1}{\sin^2 \theta} d\theta \right) = \\ &= R \left(\cos \theta + \int \frac{d\theta}{\sin \theta} \right) \end{aligned}$$

und wegen

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

gilt also:

$$z(\theta) = R \left(\cos \theta + \log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \right) + C \quad (\log : \text{natürlicher Logarithmus}).$$

Aus $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} z(\theta) = 0$ folgt $C = 0$, da $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

Somit ergibt sich für die Traktrix T die Parametrisierung:

$$\alpha(\theta) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta + \log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

Durch Rotation der Traktrix T um die z -Achse entsteht nun eine Pseudosphäre P (vgl. Abb. 3) mit der Parametrisierung:

$$x(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta + \log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi)^{10}.$$

Um deren Krümmung zu erhalten, berechnet man wieder:

$$x_\theta = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix}, \quad x_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

¹⁰Im Unterschied zur Kugelsphäre besitzt die Pseudosphäre wie eingangs erwähnt eine Singularität bei $\theta = 0$, was für unsere Zwecke jedoch nicht von Bedeutung ist. Den fehlenden Meridian ($\varphi = 0$) erhält man wieder durch Drehung des Koordinatensystems.

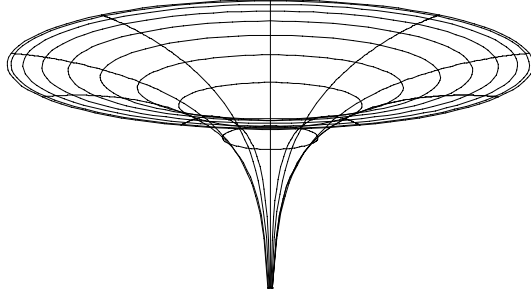


Abbildung 3: Pseudosphäre P

$$\implies E = R^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} \right) = R^2 \cot^2 \theta,$$

$$F = 0,$$

$$G = R^2 \sin^2 \theta.$$

$$x_\theta \times x_\varphi = R^2 \begin{pmatrix} -\cos^2 \theta \cos \varphi \\ -\cos^2 \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\implies |x_\theta \times x_\varphi|^2 = R^4 (\cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta) = R^4 \cos^2 \theta$$

$$\implies N = \frac{x_\theta \times x_\varphi}{|x_\theta \times x_\varphi|} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt (wegen $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{-2 \sin^2 \theta \cos \theta - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} = -\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \theta + 1}{\sin^2 \theta} \right)$):

$$x_{\theta\theta} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \frac{\sin^2 \theta + 1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad x_{\theta\varphi} = R \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\varphi\varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e &= R \left(\sin \theta \cos \theta - \cos \theta \left(\frac{\sin^2 \theta + 1}{\sin \theta} \right) \right) = -R \cot \theta, \\ f &= 0, \\ g &= R \left(\sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \right) = R \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Also erhält man

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-R^2 \cos^2 \theta}{R^4 \cos^2 \theta} = -\frac{1}{R^2} \quad \square$$

Wie bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, bestimmte Minding 1839 in seiner eingangs zitierten Arbeit ([14] S. 376-380) die Rotationsflächen konstanter Gaußscher Krümmung (in voller Ausführung allerdings nur für $K = -1$). Eine vollständige Darstellung findet man in [19] (Kap. 26, S. 141ff).

3 Lokale Isometrie allgemeiner Flächen

3.1 Problemstellung

3.1.1 Gegenbeispiel

Das folgende Beispiel behandelt zwei Flächen, die in jedem Punkt die gleiche Gaußsche Krümmung haben, aber dennoch nicht lokal isometrisch sind:

Man betrachte die (verschiedenen) hyperbolischen Paraboloiden ($u, v \in \mathbb{R}$):

| | | |
|---|--|--|
| $S : \quad x(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$ $x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}$ $\Rightarrow E = 1 + 4u^2, \\ F = -4uv, \\ G = 1 + 4v^2$ $N = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_{uv} = \mathbf{0}, \quad x_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow e = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \\ f = 0, \\ g = \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$ | | $\bar{S} : \quad \bar{x}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2uv \end{pmatrix}$ $\bar{x}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2u \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \bar{E} = 1 + 4v^2, \\ \bar{F} = 4uv, \\ \bar{G} = 1 + 4u^2$ $\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2v \\ -2u \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{x}_{uu} = \mathbf{0}, \quad \bar{x}_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_{vv} = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \bar{e} = 0, \\ \bar{f} = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \\ \bar{g} = 0$ |
|---|--|--|

$$\Rightarrow \forall u, v \in \mathbb{R} : \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^2} = \frac{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \bar{K}.$$

Dennoch sind S und \bar{S} nicht lokal isometrisch, da offensichtlich die Bogenelemente wegen $E = \bar{G} \neq 0$, $G = \bar{E} \neq 0$, aber $F \neq \bar{F}$ für $(u, v) \neq (0, 0)$ verschieden sind:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= (1 + 4u^2) du^2 - 8uv dudv + (1 + 4v^2) dv^2 \\
 d\bar{s}^2 &= (1 + 4v^2) du^2 + 8uv dudv + (1 + 4u^2) dv^2 \quad \square
 \end{aligned}$$

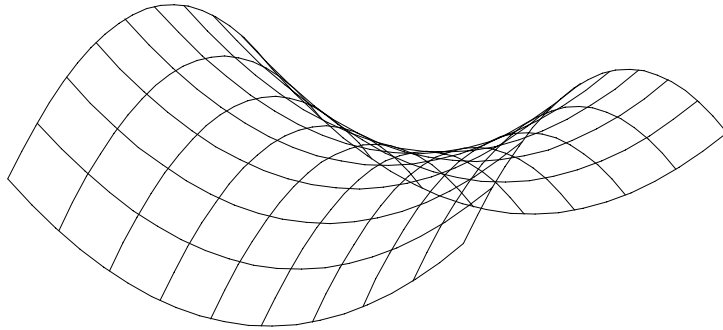


Abbildung 4: Hyperbolisches Paraboloid S : $x(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$

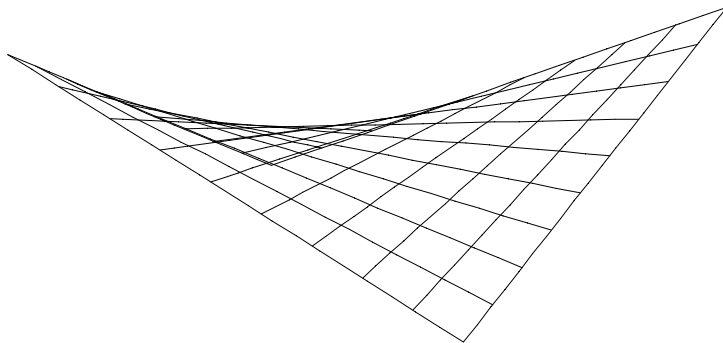


Abbildung 5: Hyperbolisches Paraboloid \bar{S} : $\bar{x}(u, v) = (u, v, 2uv)$

3.1.2 Vorgehensskizze

Die in Abschnitt 1.3 angerissene Prozedur soll nun für Flächenstücke mit nicht-konstanten Krümmungen¹¹ weitergeführt werden. Dabei demonstriert das Gegenbeispiel 3.1.1, daß obwohl die Gleichheit der Gaußschen Krümmungen zweier Flächen nach dem Theorema Egregium (Satz 3) eine notwendige Bedingung für die lokale Isometrie darstellt, diese nicht hinreichend ist. Wie in 1.3 beschrieben, benötigt man dazu neben der Gaußschen Krümmung eine weitere Biegungsinvariante.

Im folgenden Abschnitt 3.2 werden zunächst in 3.2.1 die beiden Beltrami-Differentiatoren (∇, Δ) eingeführt, die auf die Gaußsche Krümmung K angewandt zwei weitere Biegungsinvarianten ergeben. Die Einführung isothermer Parameter in 3.2.2 und die Bereitstellung der Lemmata in 3.2.3 münden in den Satz 18, der das entscheidende Resultat für den Algorithmus liefert. Satz 18 besagt, daß wenn sowohl ∇K als auch ΔK als Funktion von K darstellbar sind, es eine lokale Isometrie zwischen den betreffenden Flächen und einer Rotationsfläche gibt. Somit ist dafür gesorgt, daß das Verfahren in jedem Fall schließlich zu einem Ende führt.

Abschnitt 3.3 formuliert dann das Ergebnis in einem zusammenfassenden Theorem (Satz 19), dessen Beweis die auftretenden Fälle einzeln verfolgt und die Ergebnisse protokolliert.

Die Einführung der Beltramischen Differentiatoren zur Lösung dieses Problems stammt von Bonnet, der das Mindingsche Verfahren (in [4]) geometrisch reproduziert (vgl. [20] S. 390f).

Auf Seite 31 sei nun ein “Lösungs-Schema” angegeben, das auf einen Blick die Struktur der Gesamtprozedur skizziert. Im folgenden sei dieses Schema knapp erläutert (die fettgedruckten Buchstaben im Text erleichtern dabei das Auffinden der entsprechenden Stelle in der Tabelle auf Seite 31):

Seien also zwei glatte Flächenstücke $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben, $S := x(U)$, $\bar{S} := \bar{x}(\bar{U})$ (**A**).

Zunächst wird geprüft, ob eins der beiden Flächenstücke (oder beide) konstante (Gaußsche) Krümmung besitzt (**B**). Dieser Fall (Flächen konstanter Krümmung) wurde im zweiten Kapitel behandelt. Aus dem Theorema Egregium folgt sofort, daß höchstens dann zwischen S und \bar{S} eine lokale Isometrie existieren kann, wenn beide Flächen konstante Krümmungen haben (**C**) und diese gleich sind¹² (**D**).

¹¹Der Fall konstanter Krümmungen wurde in Kapitel 2 durch den Satz von Minding und die anschließende Bemerkung (2.) in Abschnitt 2.3.2 bereits vollständig abgehandelt!

¹²vgl. auch Bemerkung 1. zu Satz 10

Das gewünschte Resultat lieferte das Theorem von Minding (Satz 10).

Haben beide Flächenstücke nichtkonstante Krümmungen, so liegt der Fall vor, der in diesem Kapitel behandelt wird. Unter der Annahme, zwischen S und \bar{S} gebe es eine lokale Isometrie **(E)**, erhält man für (6) in Abschnitt 1.3 die Gleichungen¹³

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K(u, v) &= \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \text{(ii)} \quad \nabla K(u, v) &= \bar{\nabla} \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Nun prüfe man, ob sich aus den beiden Gleichungen ein Widerspruch ergibt **(F)**. Ist dies nicht der Fall, so kann man, wenn (i) und (ii) voneinander unabhängige Gleichungen ergeben (d.h. Gleichung (7) in Abschnitt 1.3 ist erfüllt) **(G)**, durch direktes Ausrechnen (nach (8)) und Vergleichen der Koeffizienten der 1. Fundamentalformen (also Prüfen der Gleichung (5)¹⁴) **(H)** nachsehen, ob tatsächlich eine lokale Isometrie vorliegt.

Sind aber (i) und (ii) nicht voneinander unabhängige Gleichungen (d.h. es gilt (9)), so untersuche man stattdessen die Gleichungen¹⁵

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K(u, v) &= \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \text{(ii)'} \quad \Delta K(u, v) &= \bar{\Delta} \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}), \end{aligned}$$

die ebenfalls beide aus der Annahme der Existenz einer lokalen Isometrie folgen. Wie vorher vergewissert man sich zunächst, daß beide Gleichungen nicht widersprüchlich sind **(I)** (andernfalls gibt es keine lokale Isometrie!). Im Falle der Unabhängigkeit von (i) und (ii)' **(J)** kann man wieder (wie oben) durch direktes Ausrechnen und Vergleichen der Koeffizienten der 1. Fundamentalformen **(K)** die Existenz einer lokalen Isometrie überprüfen.

Ist nun sowohl die Gleichung (ii), als auch die Gleichung (ii)' als Funktion von (i) darstellbar, so greift Satz 18, der auf die ausführlichen Überlegungen in Abschnitt 3.2 folgt, und man erhält direkt **(L)** eine lokale Isometrie der beiden Ausgangsflächenstücke zu einer Rotationsfläche und damit auch zwischen den beiden Flächenstücken.

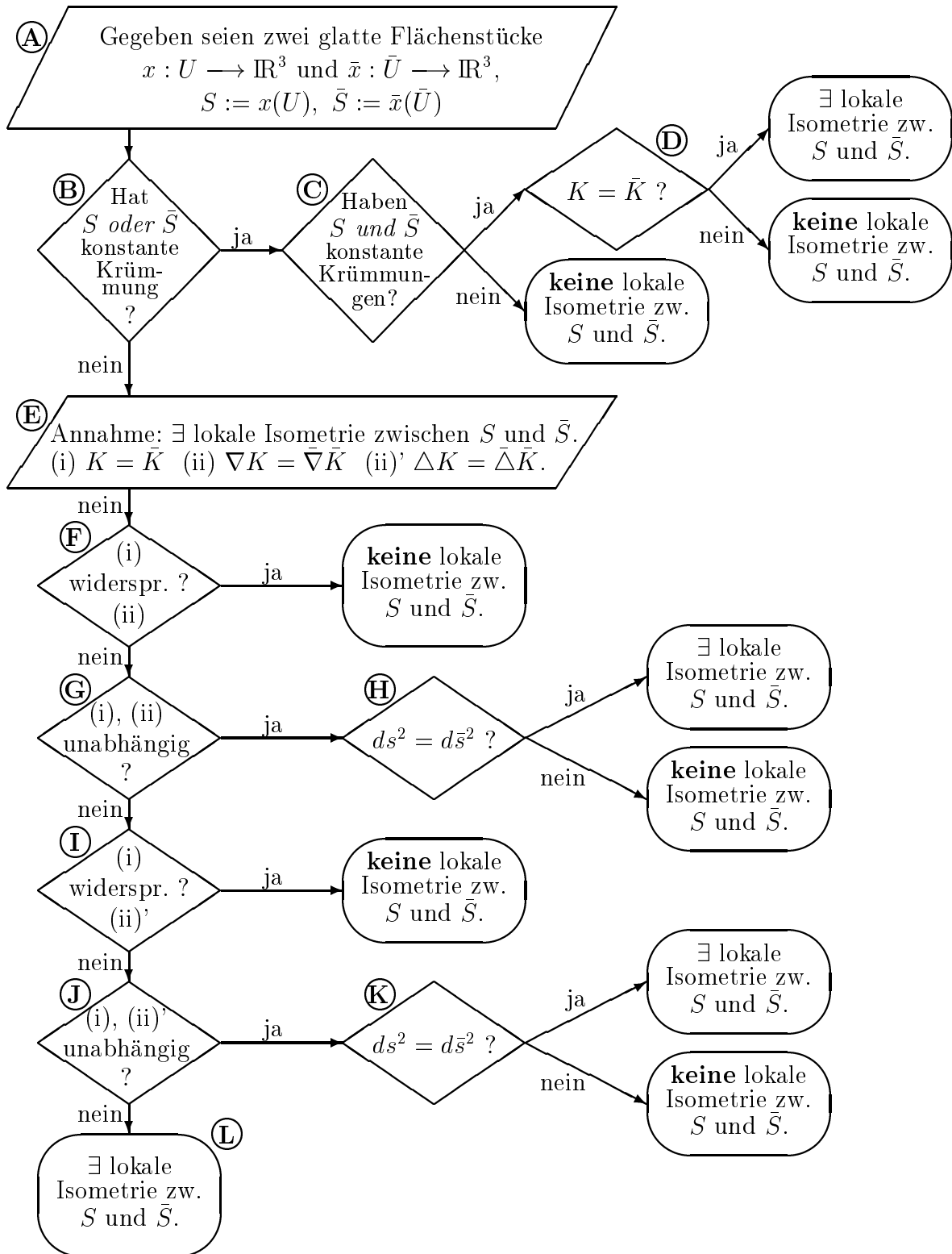
Den Ausführungen in Abschnitt 3.2 liegt folgende Literatur zugrunde:

[1], [2], [3], [6], [8], [18].

¹³dabei ist im Hinblick auf die Erläuterungen in 1.3 $L =: \nabla K$ gewählt

¹⁴Gleichung (5), also $E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}$ ist äquivalent zu der Gleichheit der Bogenelemente: $ds^2 = d\bar{s}^2$

¹⁵nun sei in Hinblick auf 1.3 $M =: \Delta K$



3.2 Technische Hilfsmittel

In dem gesamten Abschnitt bezeichne S eine glatte Raumfläche, $x : U \rightarrow S$ eine Parametrisierung von S und E, F, G die dazu gehörigen Koeffizienten der 1. Fundamentalform.

3.2.1 Beltrami-Differentiatoren

Definition (Beltrami 1864)

Ein Ausdruck Φ der Gestalt

$$\Phi(E, F, G; \varphi, \psi, \dots; E_u, F_u, G_u; \varphi_u, \psi_u, \dots; E_v, F_v, G_v; \varphi_v, \psi_v, \dots; \dots),$$

der aus den Größen E, F, G und aus einer oder mehreren Ortsfunktionen

$$\varphi, \psi, \dots : U \rightarrow \mathbb{R}$$

der Fläche S , sowie aus deren Ableitungen nach den Parametern u, v gebildet ist heißt *Differentiator* (oder nach Lamé¹⁶ (1859) *Differentialparameter*) der Funktionen φ, ψ, \dots bzgl. der 1. Fundamentalform (E, F, G) , wenn er bei Parameterwechsel seine Gestalt nicht verändert.

Nach dieser Definition liefert jeder Differentiator Φ zu den an ihm beteiligten Ortsfunktionen $\varphi(u, v), \psi(u, v), \dots$ auf der Fläche S eine neue mit ihnen biegungs- und parameterinvariant verbundene Ortsfunktion $\Phi(u, v)$.

Satz 11

Seien

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$$

Ortsfunktionen auf der Fläche S .

Der Operator ∇ definiert durch:

$$\nabla(\varphi, \psi) := \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u}{EG - F^2}$$

$$\text{bzw. } \nabla\varphi := \nabla(\varphi, \varphi) = \frac{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}{EG - F^2}$$

ist ein Differentiator (bzgl. der Parametrisierung x von S).

Definition: Er wird als *erster Beltramischer Differentiator* bezeichnet.

¹⁶Gabriel Lamé (1795-1870)

Beweis des Satzes (nach [18]):

Zunächst betrachte man Tangentenvektoren τ_φ und τ_ψ entlang eines durch $\varphi = \text{const.}$ und $\psi = \text{const.}$ festgelegten Netzes auf dem Flächenstück $x : U \rightarrow S$. Nach [18] (S. 20 (4.7) und S. 21 (4.14)) ist es möglich, die Tangentenvektoren wie folgt zu definieren:

$$\tau_\varphi := \frac{\varphi_v x_u - \varphi_u x_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \tau_\psi := \frac{\psi_v x_u - \psi_u x_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Daraus folgt dann (wegen $E = \langle x_u, x_u \rangle$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \langle x_v, x_v \rangle$):

$$\langle \tau_\varphi, \tau_\psi \rangle = \nabla(\varphi, \psi) \quad \text{und} \quad \langle \tau_\varphi, \tau_\varphi \rangle = \nabla\varphi.$$

Es genügt also, die Invarianz der Tangentenvektoren τ_φ und τ_ψ unter Parametertransformationen zu zeigen:

Man benutze dazu die symbolische Schreibweise:

$$\tau_\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left| \frac{\partial(x, \varphi)}{\partial(u, v)} \right|, \quad \tau_\psi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left| \frac{\partial(x, \psi)}{\partial(u, v)} \right|$$

(dabei beachte man, daß die Parametrisierung x auf die Fläche S , also in den \mathbb{R}^3 , die Ortsfunktionen φ und ψ dagegen nur in die Ebene \mathbb{R} abbilden!).

Gegeben sei nun eine beliebige Parametertransformation von den Parametern (u, v) zu den Parametern (\bar{u}, \bar{v}) . Bekanntlich gilt dann:

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = D^2 \cdot (EG - F^2), \quad (\text{vgl. auch [18] S. 43 (8.12)})$$

wobei $D := \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right|$ die Jacobideterminante des Koordinatenwechsels ist und $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ die Koordinaten der 1. Fundamentalform bzgl. (\bar{u}, \bar{v}) sind.

Nach dem Multiplikationssatz für Funktionaldeterminanten erhält man darüber hinaus:

$$\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{\varphi})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| = D \cdot \left| \frac{\partial(x, \varphi)}{\partial(u, v)} \right|$$

und

$$\left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{\psi})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| = D \cdot \left| \frac{\partial(x, \psi)}{\partial(u, v)} \right|.$$

Es folgt insgesamt:

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{\varphi})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left| \frac{\partial(x, \varphi)}{\partial(u, v)} \right|$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left| \frac{\partial(\bar{x}, \bar{\psi})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left| \frac{\partial(x, \psi)}{\partial(u, v)} \right|,$$

die Tangentenvektoren τ_φ und τ_ψ sind also parameterinvariant. \square

Wegen $\nabla\varphi = \langle \tau_\varphi, \tau_\varphi \rangle$ gilt $\nabla\varphi > 0$.

Satz 12

Sei

$$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Ortsfunktion auf der Fläche S .

Der Operator Δ definiert durch:

$$\Delta\psi := \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G\psi_u - F\psi_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E\psi_v - F\psi_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right)$$

ist ebenfalls ein Differentiator (bzgl. der Parametrisierung x von S).

Definition: Er wird als *zweiter Beltramischer Differentiator* bezeichnet.

Zum Beweis der Parameterinvarianz sei auf [6] (Kap. 38 S. 88f) verwiesen, wo man ausgehend von dem Integral

$$\Pi := \iint \nabla(\varphi, \psi) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

mit Hilfe des Greenschen Satzes einen Ausdruck findet, der gleich Π ist und neben $\Delta\psi$ nur noch eine weitere Parameterinvariante enthält. \square

Beltrami hat im Anschluß an Untersuchungen von Lamé seine Differentiatoren in einer Abhandlung aus den Jahren 1864 und 1865 eingeführt (Ricerche di analisi applicata alla geometria, Opere I, S. 107-198, bes. Nr. XIV und XV) - vgl. [3] S. 225.

3.2.2 Isotherme Parameter

Definition

1. Eine Parametrisierung $\tilde{x} : \tilde{U} \rightarrow S$ ($\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$) der Fläche S (mit den zugehörigen Koeffizienten $(\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G})$ der 1. Fundamentalform) heißt *isotherm*,

$$:\iff \quad \tilde{E} \equiv \tilde{G} =: \lambda \quad \text{und} \quad \tilde{F} \equiv 0 \quad \text{auf } \tilde{U},$$

d.h. das Bogenelement hat die Form:

$$ds^2 = \lambda(\varphi, \psi)(d\varphi^2 + d\psi^2) \quad (\varphi, \psi) \in \tilde{U}.$$

φ und ψ heißen (zueinander *konjugierte*) *isotherme Parameter*.

2. Sei $x : U \rightarrow S$ eine orthogonale Parametrisierung von S (d.h. $F = 0$), $(u, v) \in U$. Man sagt, die Parameterlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ bilden ein *isothermes Parameternetz*, wenn es lokal eine Parametertransformation

$$\varphi = \underbrace{\zeta(u)}_{\zeta \text{ unabh. von } v}, \quad \psi = \underbrace{\eta(v)}_{\eta \text{ unabh. von } u}$$

gibt, so daß

$$ds^2 = \lambda(\varphi, \psi)(d\varphi^2 + d\psi^2).$$

$u = \text{const}$, $v = \text{const}$ heißen dann *isotherme Parameterlinien*.

Bemerkung

Bei der in 2. erwähnten Parametertransformation bewegt man sich "längs der Parameterlinien":

$$\begin{aligned} u = \text{const} &\quad \Rightarrow \quad \varphi = \zeta(u) = \text{const}, \\ v = \text{const} &\quad \Rightarrow \quad \psi = \eta(v) = \text{const}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, wann eine beliebige orthogonale Parametrisierung ein isothermes Parameternetz bildet.

Satz 13

Sei $x : U \rightarrow S$ eine orthogonale Parametrisierung der Fläche S (also $F \equiv 0$), $G(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in U$.

Die Parameterlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ bilden genau dann (lokal) ein isothermes Parameternetz, wenn

$$\frac{E}{G} = \frac{\Upsilon}{\Phi} \quad (\Upsilon, \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}),$$

wobei $\Upsilon = \Upsilon(u) \geq 0$ nur von u und $\Phi = \Phi(v) > 0$ nur von v abhängen.

Beweis:

1. “ \implies ”: Das Bogenelement zu den isothermen Parametern (φ, ψ)

$$ds^2 = \lambda(\varphi, \psi)(d\varphi^2 + d\psi^2)$$

erhält man (nach der Definition eines isothermen Parameternetzes) durch Parametertransformation “entlang der Parameterlinien” (vgl. obige Bemerkung, man wähle dabei $\eta \neq \text{const}$.):

$$\varphi = \zeta(u), \quad \psi = \eta(v).$$

Somit ergibt sich für die Parameter (u, v) wegen

$$d\varphi^2 = \left(\frac{d\zeta(u)}{du}\right)^2 du^2, \quad d\psi^2 = \left(\frac{d\eta(v)}{dv}\right)^2 dv^2$$

das Bogenelement

$$ds^2 = \lambda(\zeta(u), \eta(v)) \left(\left(\frac{d\zeta(u)}{du}\right)^2 du^2 + \left(\frac{d\eta(v)}{dv}\right)^2 dv^2 \right).$$

Setzt man nun

$$\Upsilon(u) := \left(\frac{d\zeta(u)}{du}\right)^2 \quad \text{und} \quad \Phi(v) := \left(\frac{d\eta(v)}{dv}\right)^2,$$

d.h. also $\Upsilon = \Upsilon(u) \geq 0$ und $\Phi = \Phi(v) > 0$, so erhält man

$$\frac{E}{G} = \frac{\lambda(\zeta(u), \eta(v))\Upsilon}{\lambda(\zeta(u), \eta(v))\Phi} = \frac{\Upsilon}{\Phi}.$$

2. “ \Leftarrow ”: Aus

$$\frac{E}{G} = \frac{\Upsilon}{\Phi}$$

(Υ und Φ wie oben) folgt sofort:

$$E = \sigma(u, v)\Upsilon(u), \quad G = \sigma(u, v)\Phi(v);$$

somit also das Bogenelement:

$$ds^2 = \sigma(u, v)(\Upsilon(u)du^2 + \Phi(v)dv^2).$$

Durch die Parametertransformation

$$\begin{aligned}\varphi &:= \int \sqrt{\Upsilon(u)} du \\ \psi &:= \int \sqrt{\Phi(v)} dv\end{aligned}$$

erhält man dann lokal die Parameter (φ, ψ) mit dem Bogenelement

$$ds^2 = \sigma(u, v)(d\varphi^2 + d\psi^2) =: \lambda(\varphi, \psi)(d\varphi^2 + d\psi^2) \quad \square$$

3.2.3 Beltrami-Differentiatoren in isothermen Parametern

Lemma 14

$$\begin{aligned}
 (\varphi, \psi) \in \tilde{U} \text{ sind isotherme Parameter} &\iff \\
 \iff \nabla\varphi = \nabla\psi, \quad \nabla(\varphi, \psi) = 0 &\text{ auf } \tilde{U}.
 \end{aligned}$$

Beweis:

Das (allgemeine!) Bogenelement einer Fläche S bzgl. der Parametrisierung (φ, ψ) sei:

$$ds^2 = \tilde{E}d\varphi^2 + \tilde{F}d\varphi d\psi + \tilde{G}d\psi^2.$$

Dann gilt:

$$\nabla\varphi = \frac{\tilde{E} \overbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2}^{=0} - 2\tilde{F} \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}}^{=0} + \tilde{G} \overbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right)^2}^{=1}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}, \quad (12)$$

und analog:

$$\nabla\psi = \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}. \quad (13)$$

Weiter:

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{\tilde{E} \overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial\psi}}^{=0} - \tilde{F} \left(\overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial\psi}}^{=1} + \overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}}^{=0} \right) + \tilde{G} \overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}}^{=0}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = -\frac{\tilde{F}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 (\varphi, \psi) \in \tilde{U} \text{ sind isotherme Parameter} &\iff \tilde{E} \equiv \tilde{G}, \quad \tilde{F} \equiv 0 \text{ auf } \tilde{U} \iff \\
 \iff \nabla\varphi = \nabla\psi, \quad \nabla(\varphi, \psi) = 0 &\text{ auf } \tilde{U} \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 15

$\varphi = \varphi(u, v)$ ist genau dann ein isothermer Parameter auf der Fläche S , wenn

$$\Delta\varphi = 0.$$

Beweis:

Sei $x : U \rightarrow S$ eine (beliebige) Parametrisierung der Fläche S .

Zur Abkürzung setze man $W := \sqrt{EG - F^2}$.

In den Parametern $(u, v) \in U$ gilt:

$$\Delta\varphi(u, v) = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{W} \right) \right).$$

1. “ \implies ”: Gegeben sei auf S eine isotherme Parametrisierung mit den Parametern (φ, ψ) . Dann hat das Bogenelement die Gestalt

$$ds^2 = \lambda(\varphi, \psi)(d\varphi^2 + d\psi^2).$$

Da Δ als Differentiator invariant gegenüber Parametertransformationen ist, gilt in der Parametrisierung (φ, ψ) :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}}{\lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial\psi} \left(\frac{\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}}{\lambda} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(1) + \frac{\partial}{\partial\psi}(0) \right) = 0. \end{aligned}$$

2. “ \impliedby ”: $\Delta\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{W} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{W} dv + \frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{W} du &=: d\psi \end{aligned}$$

ist ein vollständiges Differential¹⁷.

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \psi_u &= \frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{W}, \\ \psi_v &= \frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{W}. \end{aligned} \tag{14}$$

¹⁷Dies ist ein Ergebnis aus der Theorie der exakten Dgl., vgl. dazu [21] Satz III, S.32

Nun können $\nabla\varphi$, $\nabla\psi$ und $\nabla(\varphi, \psi)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\nabla(\varphi, \psi) &= \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u}{W^2} = \\
&= \frac{1}{W^3} \left(\underbrace{EG\varphi_u\varphi_v}_{=: \alpha} - \underbrace{EF\varphi_v^2}_{=: \beta} - \underbrace{FG\varphi_u^2}_{=: \gamma} + \underbrace{F^2\varphi_u\varphi_v}_{=: \delta} - \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{F^2\varphi_u\varphi_v}_{=: \delta} + \underbrace{EF\varphi_v^2}_{=: \beta} + \underbrace{FG\varphi_u^2}_{=: \gamma} - \underbrace{EG\varphi_u\varphi_v}_{=: \alpha} \right) = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \frac{E\psi_v^2 - 2F\psi_u\psi_v + G\psi_u^2}{W^2} = \\
&= \frac{1}{W^4} \left(EG^2\varphi_u^2 - 2EFG\varphi_u\varphi_v + EF^2\varphi_v^2 - 2F^2G\varphi_u^2 + 2F^3\varphi_u\varphi_v + \right. \\
&\quad \left. + 2EFG\varphi_u\varphi_v - 2EF^2\varphi_v^2 + F^2G\varphi_u^2 - 2EFG\varphi_u\varphi_v + E^2G\varphi_v^2 \right) = \\
&= \frac{1}{W^4} \left(EG^2\varphi_u^2 - EF^2\varphi_v^2 - F^2G\varphi_u^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2F^3\varphi_u\varphi_v - 2EFG\varphi_u\varphi_v + E^2G\varphi_v^2 \right) = \\
&= \frac{1}{W^4} \left(G(EG - F^2)\varphi_u^2 - 2F(EG - F^2)\varphi_u\varphi_v + E(EG - F^2)\varphi_v^2 \right) = \\
&= \frac{1}{W^2} \left(E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2 \right) = \\
&= \nabla\varphi.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 14 folgt das gewünschte Ergebnis. \square

Bemerkung

Aus den Gleichungen (14) im Beweis von Lemma 15 folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= \frac{E\psi_v - F\psi_u}{W} \\
\varphi_v &= \frac{F\psi_v - G\psi_u}{W}
\end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \frac{1}{W} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G\psi_u - F\psi_v}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E\psi_v - F\psi_u}{W} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{W} (-\varphi_{vu} + \varphi_{uv}) = 0
\end{aligned}$$

Die Situation ist also (natürlich) völlig symmetrisch.

Nun betrachte man speziell die Gaußsche Krümmung K als Ortsfunktion auf dem glatten Flächenstück $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$:

Lemma 16

Die Parameterlinien $K = \text{const}$ (und deren Orthogonaltrajektorien) bilden genau dann lokal ein isothermes Parameternetz, wenn gilt:

$$\frac{\Delta K}{\nabla K} \text{ ist eine Funktion von } K.$$

Beweis:

1. “ \implies ”: Nach der Definition isothermer Parameternetze in Abschnitt 3.2.2 gibt es eine Funktion $\zeta = \zeta(K)$ von K , so daß ζ ein isothermer Parameter ist.

Nach Lemma 15 muß nun gelten:

$$\Delta \zeta = 0$$

Erneut setze man zur Abkürzung $W := \sqrt{EG - F^2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \zeta = \\ &= \frac{1}{W} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G\zeta_u - F\zeta_v}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E\zeta_v - F\zeta_u}{W} \right) \right) = \left(\begin{array}{l} \text{da } \zeta_u = \zeta_K K_u \\ \text{und } \zeta_v = \zeta_K K_v \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{W} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{GK_u - FK_v}{W} \zeta_K \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{EK_v - FK_u}{W} \zeta_K \right) \right) = \\ &= \frac{1}{W} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{GK_u - FK_v}{W} \right) \zeta_K + \underbrace{\left(\frac{GK_u - FK_v}{W} \right) \frac{\partial}{\partial u} (\zeta_K)}_{=\zeta_{KK} K_u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{EK_v - FK_u}{W} \right) \zeta_K + \underbrace{\left(\frac{EK_v - FK_u}{W} \right) \frac{\partial}{\partial v} (\zeta_K)}_{=\zeta_{KK} K_v} \right) = \\ &= \Delta K \zeta_K + \nabla K \zeta_{KK} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta K}{\nabla K} = -\frac{\zeta_{KK}}{\zeta_K}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta K}{\nabla K} \text{ ist eine Funktion von } K.$$

2. “ \impliedby ”: Sei nun

$$\frac{\Delta K}{\nabla K} =: f(K)$$

Setze

$$\zeta_K := \exp\left(-\int f(K)dK\right) \quad (15)$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta_{KK}}{\zeta_K} &= f(K) = \frac{\Delta K}{\nabla K} \\ \Rightarrow \Delta\zeta &= \Delta K\zeta_K + \nabla K\zeta_{KK} = 0. \end{aligned}$$

Und mit Lemma 15:

$$\zeta(K) \text{ ist ein isothermer Parameter } \quad \square$$

Bemerkung

Aus dem Beweis von Lemma 16 kann man folgendes entnehmen:

Für den zu ζ konjugierten isothermen Parameter η gilt nach Lemma 14:

$$\begin{aligned} \nabla\eta &= \nabla\zeta(K) = \\ &= \frac{E(\zeta(K))_v^2 - 2F(\zeta(K))_u(\zeta(K))_v + G(\zeta(K))_u^2}{EG - F^2} = \\ &= \zeta_K^2 \frac{EK_v^2 - 2FK_uK_v + GK_u^2}{EG - F^2} = \\ &= \zeta_K^2 \nabla K \stackrel{\text{(nach (15) im Beweis von Lemma 16)}}{=} \\ &= \exp\left(-2\int \frac{\Delta K}{\nabla K}dK\right) \nabla K. \end{aligned}$$

Wählt man nun auf den Parameterlinien $K = \text{const}$ (oder $\zeta(K) = \text{const}$) den Parameter K und auf deren Orthogonaltrajektorien den Parameter η und bezeichnet die zugehörigen Koeffizienten der 1. Fundamentalform mit $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$, so ergibt sich aus den Formeln (12) und (13), die im Beweis von Lemma 14 (allgemein!) entwickelt wurden, mit $\tilde{F} \equiv 0$:

$$\nabla K = \frac{1}{\tilde{E}}, \quad \nabla\eta = \frac{1}{\tilde{G}},$$

also das Bogenelement:

$$ds^2 = \frac{1}{\nabla K} dK^2 + \frac{\exp\left(2\int \frac{\Delta K}{\nabla K}dK\right)}{\nabla K} d\eta^2. \quad (16)$$

Man erhält damit leicht, nach einer kurzen Vorbemerkung zu Rotationsflächen in Lemma 17 den entscheidenden Satz 18, der uns später (in Abschnitt 3.3) ein wichtiges Ergebnis bei der Lösung des Mindingschen Problems liefern wird.

Folgendes Resultat über Rotationsflächen ist jedoch vorher noch für den nächsten Satz von Bedeutung:

Lemma 17

Jede Rotationsfläche kann so parametrisiert werden, daß ihr Bogenelement die Gestalt:

$$ds^2 = du^2 + R^2(u)dv^2,$$

wobei R eine reelle Funktion ist, hat.

Umgekehrt ist jedes Flächenstück mit derartigem Bogenelement Teil einer Rotationsfläche.

Beweis:

Die Kurve

$$\beta(u) =: (f(u), g(u)) \quad (u \in I)$$

(in der x-z-Ebene) sei nach der Bogenlänge parametrisiert, d.h.

$$1 = \left| \frac{d\beta(u)}{du} \right| = \left(\frac{df(u)}{du} \right)^2 + \left(\frac{dg(u)}{du} \right)^2,$$

und rotiere um die z-Achse.

Die so entstandene Rotationsfläche hat die Parametrisierung:

$$x^{rot}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (v \in J \subseteq]0, 2\pi[).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u^{rot}, x_u^{rot} \rangle = \left(\frac{df(u)}{du} \right)^2 + \left(\frac{dg(u)}{du} \right)^2 = 1, \\ F &= \langle x_u^{rot}, x_v^{rot} \rangle = 0 \\ G &= \langle x_v^{rot}, x_v^{rot} \rangle = \left(\frac{df(u)}{du} \right)^2 \end{aligned}$$

Setzt man nun $R(u) := \frac{df(u)}{du}$, so erhält man das gewünschte Ergebnis.

Die Umkehrung erhält man, wenn man $f(u) := \int R(u)du$ setzt. \square

Als Ergebnis der vorangegangenen Überlegungen in diesem Abschnitt kann nun auf einfache Weise der folgende Satz 18 formuliert und bewiesen werden:

Satz 18

Gegeben sei ein glattes Flächenstück $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\nabla K = \mu(K) \quad \text{und} \quad \Delta K = \nu(K) \quad \text{auf } U,$$

wobei μ und ν reelle Funktionen sind.

Dann gibt es eine lokale Isometrie zwischen $S := x(U)$ und einer Rotationsfläche.

Beweis:

Die (äquivalenten) Bedingungen von Lemma 16 sind n.V. erfüllt. Nach der Bemerkung zu Lemma 16 hat das Bogenelement zu den Parametern (K, η) die Gestalt (16), also:

$$ds^2 = \frac{1}{\nabla K} dK^2 + \frac{\exp\left(2 \int \frac{\Delta K}{\nabla K} dK\right)}{\nabla K} d\eta^2.$$

Durch die Parametertransformation:

$$u(K) := \int \frac{dK}{\sqrt{\mu(K)}} = \int \frac{dK}{\sqrt{\nabla K}}, \quad v := \eta$$

erhält man lokal mit

$$R(u) := \frac{\exp\left(\int \frac{\nu(K)}{\mu(K)} dK\right)}{\frac{du(K)}{dK}},$$

(wobei K lokal als Funktion von u darstellbar ist) das Bogenelement der Gestalt

$$ds^2 = du^2 + R^2(u)dv^2.$$

Mit Lemma 17 folgt dann die Behauptung. \square

3.3 Prüfung der lokalen Isometrie

Nach den Vorarbeiten im Abschnitt 3.2 kann nun die in 3.1.2 beschriebene Prozedur aufgenommen und zu Ende geführt werden. Als Resultat erhält man zusammenfassend:

Satz 19

Gegeben seien zwei glatte Flächenstücke

$$x : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \bar{x} : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Anhand der Biegungsinvarianten K , ∇K und ggf. ΔK läßt sich eindeutig feststellen, ob es eine lokale Isometrie zwischen den beiden Flächenstücken gibt.

Beweis:

Sei $S := x(U)$ und $\bar{S} := \bar{x}(\bar{U})$.

Der Fall konstanter Gaußscher Krümmung läßt sich allein anhand von K entscheiden und wurde in Kap. 2 abgeschlossen.

Seien K und \bar{K} nicht konstant.

Zunächst nehme man an, es gebe eine lokale Isometrie zwischen den beiden Flächenstücken.

Neben der Gaußschen Krümmung K betrachte man den ersten Beltrami-Differentiator ∇ angewandt auf K als weitere Biegungsinvariante. In diesem Fall lautet (6) in Abschnitt 1.3:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & K(u, v) = \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}), \\ \text{(ii)} \quad & \nabla K(u, v) = \bar{\nabla} \bar{K}(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Es gibt nun drei Möglichkeiten, wie sich diese Gleichungen zueinander verhalten können:

1. (i) widerspricht (ii):

Dann ist die Annahme der Existenz einer lokalen Isometrie zwischen den Flächen S und \bar{S} ad absurdum geführt. Ergebnis:

S und \bar{S} sind nicht lokal isometrisch \square

2. (i) und (ii) sind voneinander unabhängige, sich nicht widersprechende Gleichungen:

chungen. Dann folgt:

$$\left| \frac{\partial(\bar{K}, \bar{\nabla}\bar{K})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \neq 0,$$

und man erhält nach dem Satz über implizite Funktionen ([7], S. 71) eine Umgebung $U_0 \subseteq U$ und darauf lokal eine Parametertransformation

$$\tau : U_0 \longrightarrow \bar{U} \quad \text{mit} \quad (\bar{u}, \bar{v}) = \tau(u, v) \quad \text{auf } U_0.$$

Sind nun die in Satz 1 geforderten Bedingungen für die lokalen Parametrisierungen $x|_{U_0}$ (von S) und $\bar{x} \circ \tau$ (von \bar{S}) erfüllt, d.h.:

$$E \equiv \bar{E}, \quad F \equiv \bar{F}, \quad G \equiv \bar{G} \quad \text{auf } U_0,$$

so ist bestätigt:

Es gibt eine lokale Isometrie zwischen S und \bar{S} \square

Ergibt sich andernfalls:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &\neq \bar{E}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \quad \text{oder} \\ F(u_0, v_0) &\neq \bar{F}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \quad \text{oder} \\ G(u_0, v_0) &\neq \bar{G}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \end{aligned}$$

für ein $(u_0, v_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0) \in U_0 \times \bar{U}$ mit $(\bar{u}, \bar{v}) = \tau(u, v)$, dann war die Annahme der Existenz einer lokalen Isometrie falsch:

S und \bar{S} sind nicht lokal isometrisch \square

3. (i) und (ii) sind voneinander abhängige, sich nicht widersprechende Gleichungen, d.h. (i) folgt aus (ii) ohne Widerspruch. Dann gibt es eine Funktion $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß:

$$\nabla K(u, v) = \mu(K(u, v)),$$

und wegen (i) und (ii):

$$\bar{\nabla}\bar{K}(\bar{u}, \bar{v}) = \mu(\bar{K}(\bar{u}, \bar{v})).$$

In diesem Fall benötigt man also eine weitere Biegungsinvariante. Dabei bietet sich nun der zweite Beltramische Differentiator Δ angewandt auf K an.

Wähle also nun für die Gleichungen (6) in Abschnitt 3.1:

- (i) $K(u, v) = \bar{K}(\bar{u}, \bar{v})$ (wie oben),
- (ii)' $\Delta K(u, v) = \bar{\Delta}\bar{K}(\bar{u}, \bar{v})$.

Nun geht man analog vor und unterscheidet weitere drei Fälle:

(a) (i) widerspricht nun (ii)':

Dann ist die Annahme der Existenz einer lokalen Isometrie zwischen den Flächen S und \bar{S} auch in diesem Fall ad absurdum geführt. Ergebnis:

S und \bar{S} sind nicht lokal isometrisch \square

(b) (i) und (ii)' sind voneinander unabhängige, sich nicht widersprechende Gleichungen. Dann folgt wieder:

$$\left| \frac{\partial(\bar{K}, \bar{\Delta}\bar{K})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \neq 0,$$

und man erhält wie oben nach dem Satz über implizite Funktionen ([7], S. 71) eine Umgebung $U'_0 \subseteq U$ und darauf lokal eine Parametertransformation

$$\tau' : U'_0 \longrightarrow \bar{U} \quad \text{mit} \quad (\bar{u}, \bar{v}) = \tau'(u, v) \quad \text{auf } U'_0.$$

Sind nun die in Satz 1 geforderten Bedingungen für die lokalen Parametrisierungen $x|_{U'_0}$ (von S) und $\bar{x} \circ \tau'$ (von \bar{S}) erfüllt, d.h.:

$$E \equiv \bar{E}, \quad F \equiv \bar{F}, \quad G \equiv \bar{G} \quad \text{auf } U'_0,$$

so ist bestätigt:

Es gibt eine lokale Isometrie zwischen S und \bar{S} \square

Ergibt sich andernfalls:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &\neq \bar{E}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \quad \text{oder} \\ F(u_0, v_0) &\neq \bar{F}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \quad \text{oder} \\ G(u_0, v_0) &\neq \bar{G}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \end{aligned}$$

für ein $(u_0, v_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0) \in U'_0 \times \bar{U}$ mit $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = \tau'(u_0, v_0)$, dann war die Annahme der Existenz einer lokalen Isometrie falsch:

S und \bar{S} sind nicht lokal isometrisch \square

Als letzter Fall bleibt nun:

(c) (i) und (ii)' sind voneinander abhängige, sich nicht widersprechende Gleichungen, d.h. (i) folgt auch aus (ii)' ohne Widerspruch. Dann gibt es eine Funktion $\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß:

$$\Delta K(u, v) = \nu(K(u, v)),$$

und wegen (i) und (ii)':

$$\bar{\Delta}\bar{K}(\bar{u}, \bar{v}) = \nu(\bar{K}(\bar{u}, \bar{v})).$$

An dieser Stelle kann man nun Dank der Vorarbeit in 3.2.3 mit Hilfe von Satz 18 eine Aussage treffen, ob es eine lokale Isometrie zwischen S und \bar{S} gibt, so daß das Verfahren (glücklicherweise) nicht ad Infinitum fortgeführt werden muß.

Es gilt nämlich nun:

$$\mu(K) = \nabla K = \bar{\nabla} \bar{K} = \mu(\bar{K}),$$

und

$$\nu(K) = \Delta K = \bar{\Delta} \bar{K} = \nu(\bar{K}).$$

Satz 18 besagt nun, daß es eine lokale Isometrie zwischen S bzw. \bar{S} und ein und derselben Rotationsfläche gibt. Somit gilt nun auch in diesem letzten Fall:

Es gibt eine Isometrie zwischen S und \bar{S} \square

Am Schluß seiner Arbeit [14] faßt Minding das Ergebnis wie folgt zusammen:

“Aus den in dieser Absicht oben entwickelten allgemeinen Formeln ergibt sich, daß die Frage, ob es möglich ist, zwei Flächen, deren Gleichungen in Coordinaten man kennt, auf einander abzuwickeln, sich immer ohne Hülfe der Integral-Rechnung beantworten läßt; es reichen nämlich die Operationen des Differentiirens und Eliminirens zu ihrer Entscheidung durch Rechnung hin.”

Literatur

- [1] C.F. Bäschlin, Einführung in die Kurven- und Flächentheorie auf vektorieller Grundlage, Orell Füssli Zürich 1947
- [2] L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Teubner Leipzig 1899
- [3] W. Blaschke, K. Leichtweiß, Elementare Differentialgeometrie, Springer Berlin 1973(5)
- [4] O. Bonnet, Mém. sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, J. éc. polyt. cah. 41, S. 208 (1865)
- [5] M.P. do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg Braunschweig 1993(3)
- [6] L.P. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover Pub. New York 1960
- [7] O. Forster, Analysis 2, Vieweg Braunschweig 1984(5)
- [8] J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, Teubner Leipzig 1913
- [9] S. Gottwald, H.-J. Ilgands, K.-H. Schlote (Hrsg.), Lexikon bedeutender Mathematiker, Deutsch Frankfurt/Main 1990
- [10] D. Hilbert, Über Flächen konstanter Gaußscher Krümmung, Trans. Amer. Math. Soc. 2, 87-99 (1901)
- [11] E. Kamke, Differentialgleichungen – Lösungsmethoden und Lösungen, Akad. Verlagsges. Leipzig 1942
- [12] A. Kneser, Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst biographischen Notizen, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 45, Hist.-lit. Abt., S. 113-128 (1900)
- [13] E.F.A. Minding, Über die Kurven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen, Journal für reine und angewandte Mathematik 5, S. 297-304 (1830)
- [14] E.F.A. Minding, Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht, Journal für reine und angewandte Mathematik 19, S. 370-387 (1839)
- [15] E.F.A. Minding, Über einen besonderen Fall bei der Abwicklung krummer Flächen, Journal für reine und angewandte Mathematik 20, S. 171-172 (1840)
- [16] A. Ostrowski, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Band II, Birkhäuser Basel 1961(2)

- [17] E.R. Rozendorn, Surfaces of negative curvature. In: Y.D. Burago, V.A. Zalgaller (Ed.), Geometry III, Chapter II, Encyclopaedia of Math. Sciences vol. 48, Springer Berlin 1992
- [18] K. Strubecker, Differentialgeometrie II – Theorie der Flächenmetrik, de Gruyter Berlin 1969(2) (Sammlung Göschen)
- [19] K. Strubecker, Differentialgeometrie III – Theorie der Flächenkrümmung, de Gruyter Berlin 1958 (Sammlung Göschen)
- [20] A. Voss, Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander. In: W.Fr. Meyer, H. Mohrmann, Encyklopädie d. Math. Wissenschaften III, Geometrie 3. Teil D6, S. 355-440, Teubner Leipzig 1903
- [21] W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer Berlin 1972
- [22] T.J. Willmore, An Introduction to Differential Geometry, Clarendon Press Oxford 1961(2)
- [23] A. Youschkevitch, Minding, Ernst Ferdinand Adolf. In: Dictionary of Scientific Biography vol. IX, S. 409-410, C. Scriber's Sons Publ. 1970-76

Erklärung:

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit Hilfe der angegebenen Literatur fertiggestellt habe.

Nürnberg, Juli 1995