Von Linien, Kreisen, Winkeln & Co.

Ist das was wir wahrnehmen wirklich wahr? Von optischen Täuschungen geht seit jeher eine besondere Faszination aus, die auch vor ihren Schülerinnen und Schülern nicht halt macht. Wie man das Interesse an geometrisch-optischen Täuschungen im Mathematikunterricht verschiedener Klassenstufen nutzen kann zeigen Rainer Rosenzweig und Rudolf Pausenberger in ihrem Beitrag.

Die Autoren:

Rainer Rosenzweig studierte Mathematik (Diplom) an der Universität Erlangen-Nürnberg und promovierte in Wahrnehmungspsychophysik an der Universität Würzburg. Er ist derzeit beruflich tätig im Wissenschaftsmanagement beim Bayerisch-Kalifornischen Hochschulzentrum und außerdem Geschäftsführer des Erlebnismuseums „Turm der Sinne“ in Nürnberg.

Rudolf Pausenberger studierte Physik (Diplom) an der Universität Erlangen-Nürnberg und am MPI für Radioastronomie in Bonn. Danach folgten die beiden Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in Mathematik und Physik. Heute unterrichtet er am Gymnasium in Lauf a.d.Pegnitz und ist außerdem verantwortlich für die Exponate im Erlebnismuseum „Turm der Sinne“.

Bilder von diversen optischen Täuschungen sind uns aus Zeitschriften und Magazinen bekannt. Einige davon gehören bereits zum Alltagswissen – sie haben ihren Platz im kollektiven Bewusstsein unserer Gesellschaft gefunden. Und doch geht von diesen einfachen Strichzeichnungen eine seltsame Faszination aus, der sich kaum jemand entziehen kann. Ziel dieses Artikels ist es, einige elementare optische Täuschungen vorzustellen und in drei Beispielen aufzuzeigen, wie man die Begeisterung, die von illusionserzeugenden Linien und Kurven ausgeht, für echtes mathematisches Lernen nutzen kann. Hintergrund der Motivation ist dabei die offensichtlich werdende Unzuverlässigkeit des ersten Eindrucks. Illusionen dienen dabei als Beispiele, dass man der Anschauung nicht immer trauen darf und motivieren somit die Anwendung objektiver Messmethoden und geometrischer Beweise.

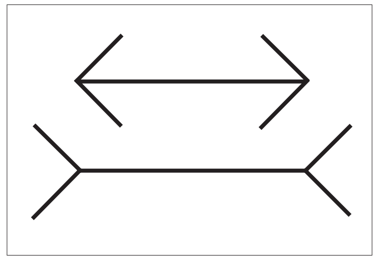
Optische Illusionen

Im Folgenden werden einige elementare Täuschungsfiguren aufgeführt, die dann im nächsten Abschnitt im Hinblick auf den Einsatz im Mathematikunterricht vorgestellt und analysiert werden:

Müller-Lyer
Eine der bekanntesten und am meisten erforschten geometrisch-optischen Täuschungen ist die Müller-Lyer-Figur. Sie wurde 1889 von dem Psychiater F.C. Müller-Lyer entdeckt und in fünfzehn verschiedenen Varianten präsentiert.

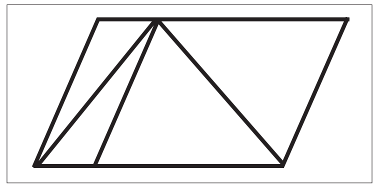
Sie besteht aus zwei exakt gleich langen Strecken, an deren Enden jeweils zwei kurze „Pfeilspitzen“ angebracht sind, die einmal einen spitzen Winkel und einmal einen stumpfen Winkel mit der Strecke einschließen. Obwohl beide Strecken genau gleich lang sind, wird die obere kürzer wahrgenommen als die untere.

Die Figur ist so einfach und gleichzeitig so überzeugend, dass sie die Grundlage für zahlreiche Experimente und Theorien ist. Gregory (1966) bot einen Erklärungsansatz für die Müller-Lyer-Täuschung, in welcher er sich auf den Größenkonstanzmechanismus bezieht. Seine Vermutung ist allerdings noch immer sehr umstritten.



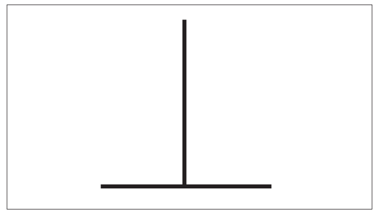
Sander
Ein ähnliches Prinzip steckt hinter der Parallelogramm-Täuschung, die der Psychologe Friedrich Sander 1928 beschrieb: Auch hier wird die rechte Diagonale gegenüber der linken überschätzt.

Ähnlich wie bei Müller-Lyer kommt die Täuschung dadurch zustande, dass die spitzen und stumpfen Winkel in der Figur als rechte



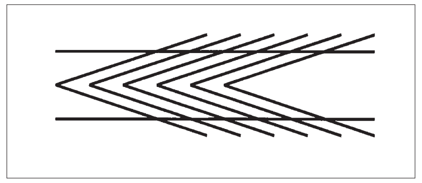
Winkel interpretiert werden. Dann würde aber aus dem Sander-Parallelogramm ein Rechteck, das in den Raum „geklappt“ ist.

T-Täuschung
Die Horizontal-Vertikal-Täuschung oder „T-Täuschung“ wurde 1851 erstmals von dem Mediziner und Augenoptiker Adolf Eugen Fick (1829-1901) erwähnt. Dahinter steckt ein Prinzip, nach dem vertikale Strecken im Vergleich zu horizontalen im Allgemeinen überschätzt werden.



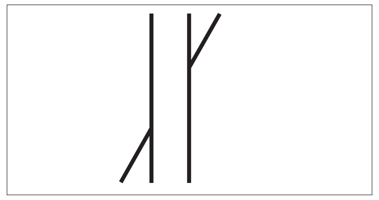
Ein sehr bekanntes Beispiel für die Horizontal-Vertikal-Täuschung kann man in St. Louis, Missouri (USA) bewundern: den Gateway Arch (siehe Abbildung links). Dieses Bauwerk ist exakt 192 m hoch und ebenfalls 192 m breit.

Zöllner
1860 fiel dem Astrophysiker Karl Friedrich Zöllner (1834-1882) auf, dass parallele horizontale Linien geneigt erscheinen, wenn sie vor einem Hintergrund mit schrägen Linien abgebildet sind.

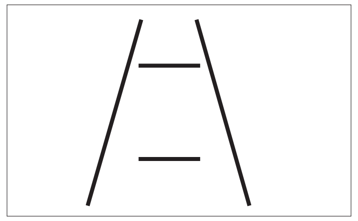


Zöllner schickte seine neu entdeckte Täuschung einem Kollegen, dem Physiker Johann Christian Poggendorff, der damals Herausgeber der Zeitschrift „Annalen der Physik und Chemie“ war.

Poggendorff
Dieser begann, mit dem Effekt zu experimentieren und stieß unmittelbar auf einen neuen Effekt: Die beiden Enden eines Streckensegments, das von einer rechteckigen Fläche verdeckt wird, erscheinen versetzt, obwohl sie eigentlich in einer fortlaufenden Linie stehen. Diese Illusionsfigur heißt seither Poggendorff-Illusion.

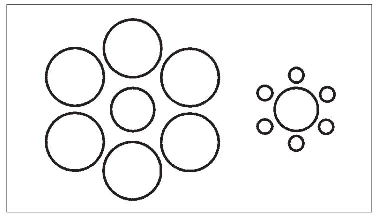


Ponzo
Der italienische Psychologe Mario Ponzo entwickelte 1912 eine nach ihm benannte Linien-Täuschung. Er gab ihr ursprünglich den bildlichen Namen „Railway-Lines-Illusion“, der an Eisenbahnschienen erinnern soll.



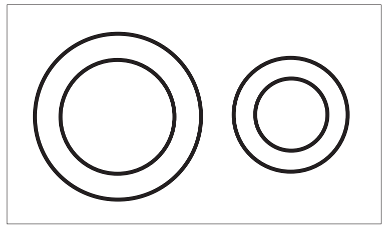
Zu der Täuschung kommt es durch eine (fälschliche?) Hypothese des Gehirns. Dieses geht von einer perspektivischen Interpretation der Linien aus: Die beiden vertikalen zueinander geneigten Geraden laufen demnach räumlich nach „hinten“ zu einem Fluchtpunkt zusammen. Aus dieser Annahme folgt, dass die eine der horizontalen Linien „näher“ beim Beobachter liegt und in diesem Zusammenhang also kürzer erscheint als die objektiv gleichlange, aber scheinbar weiter entfernte.

Titchener/Ebbinghaus
Die letzten beiden Täuschungen befassen sich mit der wahrgenommenen Größe von Kreisen. Die erste von beiden wird mit den beiden Psychologen Edward Bradford Titchener (1867-1927) und Hermann Ebbinghaus (1850-1909) in Verbindung gebracht. Sie wurde erstmals 1898 von dem Briten Titchener vorgestellt.



Delboeuf
Der belgische Philosoph und Hypnoseforscher Franz Joseph Delboeuf (1831-1896) entdeckte 1892, dass Kreise größer erscheinen, wenn darin ein konzentrischer Kreis eingezeichnet ist und kleiner, wenn sie von einem konzentrischen Kreis umschrieben werden.

Beide Kreistäuschungen weisen auf den in der Wahrnehmungsforschung bekannten Effekt hin, dass die Umgebung grundsätzlich die Wahrnehmung von Objekten beeinflusst.



Optische Täuschungen im Mathematikunterricht

Die vorgestellten optischen Täuschungen bedienen sich unterschiedlicher geometrischer Figuren und lassen sich entsprechend auf unterschiedlichen Niveaus in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I integrieren. Im Folgenden finden sich drei jahrgangsbezogene Vorschläge für den Einsatz der Täuschungen im Unterricht.

Geometrische Grundbegriffe (5. Jgst.)

In der 5. Jahrgangsstufe werden unter anderem geometrische Grundbegriffe wie Geraden, Parallelen, Kreise, Abstände und Winkel eingeführt. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit ihren neuen Zeichengeräten, dem Geodreieck und dem Zirkel üben.

Literatur:

Wolf R.: Der biologische Sinn der Sinnestäuschung, BIUZ 17, S. 33-49, 1987

Wolf R.: Vom Sinn und Unsinn der Sinnestäuschungen, Studium Generale Manuskript, WS 1997/98, Universität Würzburg, 2001(3)

Müller-Lyer F.C.: Optische Urteilstäuschungen. Archiv für Psychologie (Ergänzungband), 263-270, 1889

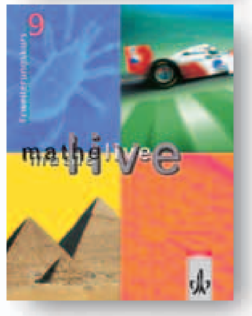
Goldstein E.B.: Wahrnehmungspsychologie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1997

Kersten, Bernd: Geometrisch-Optische Täuschungen. Verlag Dr. Kovac, 1991

Ditzinger, Thomas: Illusionen des Sehens: Eine Reise durch die fantastische Welt der optischen Wahrnehmung. Südwest Verlag , München 1997.

	Längenmessung/ -vergleich	Parallelen	Winkel	Kreise
Delboeuf	+			++
Müller-Lyer	++	+		
Poggendorff		++		
Ponzo	++			
T-Täuschung	++		+	
Titchener	+			++
Sander	++			
Zöllner		++	+	

Tabelle 1: Optische Täuschungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I



Dieser praktische Unterrichtsvorschlag: ein Service Ihres Klett-Lehrwerks.

Internet:

Weitere Täuschungen (nicht nur optischer Art) erlebt man im Erlebnismuseum „Turm der Sinne" in Nürnberg, das einen Schulbesuch wert ist. Kontakt: www.turmdersinne.de

www.geometrie.tuwien.ac.at/asperl/projekt/stein5.htm: Geometrische Täuschungen, physiologische Grundlagen und psychologische Phänomene rund um den Sehvorgang.

Es bietet sich an, die Einführung am Beispiel von solchen optischen Täuschungen zu motivieren, bei denen genau mit diesen geometrischen Elementen gespielt wird. Tabelle 1 zeigt, welche Inhalte anhand welcher Täuschung gut (+) oder besonders gut (++) geübt werden können.

Wenn ihnen die Täuschungsfiguren präsentiert werden, wollen die Schülerinnen und Schüler natürlich wissen, ob die gezeigten Strecken nun wirklich gleich lang, parallel usw. sind. Der Ansporn durch die optische Täuschung und die ausgelöste Faszination ist groß genug, dass sie selbst versuchen, diese Aufgabe mit Hilfe ihrer Messgeräte zu lösen, das heißt, dass sie selbst verschiedene Messmethoden bzw. Vergleiche üben.

Nach dem ersten Staunen schließt sich die Frage an: „Wie gut ist die Täuschung?" Um sie systematisch zu untersuchen, fertigen die Schüler verschiedene Zeichnungen an, in denen der Effekt unterschiedlich stark ausgeprägt ist. Dazu wählen sie erst ihre Lieblingstäuschung aus. Dann werden Kärtchen mit Zeichenanweisungen verteilt (vgl. Kopiervorlage zum Ausschneiden für Kärtchen zur T-Täuschung), in denen die für die Täuschung entscheidende Größe variiert. Im Beispiel der T-Täuschung zeichnen alle Schülerinnen und Schüler den waagrechten Balken mit 12 cm gleich lang, der senkrechte umfasst Längen zwischen 8 cm und 13 cm. Die auf gesonderte Blätter gezeichneten Täuschungen werden nach Größen der senkrechten Balken sortiert an die Tafel geheftet (vgl. Schema in der Kopiervorlage Optische Täuschungen). Bei der Abstimmung über der Klasse erkennen sie, dass sie nicht nur selbst täuschbar sind, sondern auch, dass und in welchem Maße dieses Phänomen bei ihren Mitschülern reproduzierbar ist.

Einfache statistische Methoden (6. Jahrgangsst.)

Wie gut die Wirkung einer Täuschung ist, lässt sich mit einer Gruppe von Testpersonen und statistischen Methoden in einer Klasse der 6. Jahrgangsstufe untersuchen.

Die Schülerinnen und Schüler betrachten eine Reihe von verschiedenen Zeichnungen einer optischen Täuschung. Die einzelnen Bilder unterscheiden sich dadurch, dass das Element, über das getäuscht werden soll, verschieden groß dargestellt ist (siehe Kopiervorlage Optische Täuschungen).

Ohne Nachzumessen wählen die Schülerinnen und Schüler bei jeder optischen Täuschung diejenige Figur aus, die ihnen korrekt erscheint. Zu jedem der Bilder wird die Anzahl der Schülermeldungen registriert. Diese Abstimmung kann offen oder geheim auf Kärtchen erfolgen. Die offene Abstimmung ist deutlich schneller durchzuführen, aber gruppendynamische Prozesse vereinheitlichen hier das Entscheidungsergebnis. In jedem Fall wird aber nicht von allen Schülerinnen und Schülern das gleiche Bild gewählt; ein mögliches Ergebnis dieser Abstimmung zur T-Täuschung zeigt das Säulendiagramm in der Abbildung unten.

Welcher Wert wurde dabei im Durchschnitt gewählt?

Eine Möglichkeit diese Frage zu beantworten ist, das Säulendiagramm auf Karton aufzuziehen, es auszuschneiden und ausgewogen aufzuhängen. Dabei erhalten die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung vom Mittelwert und eine grobe Abschätzung davon, wo das gesuchte Ergebnis liegen wird. Mit dem arithmetischen Mittel berechnen sie im Anschluss daran das Ergebnis genau. Schließlich lässt sich mit dem so ermittelten Wert eine Figur zeichnen, die so beschaffen ist, dass der Durchschnitt der Klasse die entsprechenden (mit der Täuschung behafteten) Vergleichsgrößen gleich groß (zum Beispiel bei der T-Täuschung) bzw. parallel (zum Beispiel bei der Zöllner-Täuschung) beurteilt.

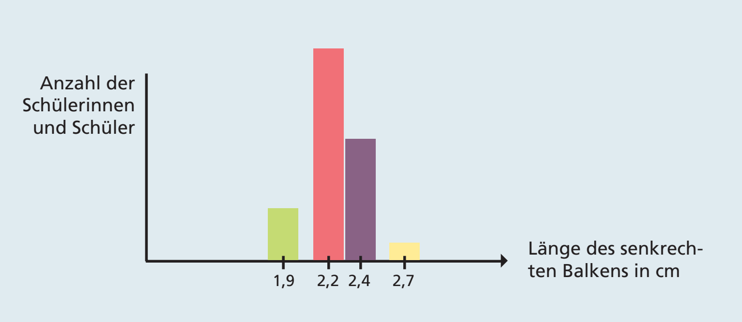


Abbildung 1: Eine mögliche Verteilung der Schülerantworten zur T-Täuschung

Man kann sich nun die Frage stellen, wie „gut" eine Täuschung (zum Beispiel im Vergleich zu einer anderen) in einer Klasse funktioniert. Dies lässt sich leicht quantitativ beantworten, indem man etwa das Verhältnis der beiden Streckenlängen bei der T-Täuschung betrachtet: Lernziel ist dabei u. a., dass die Längendifferenz zwischen waagrechtem und senkrechtem Balken offensichtlich kein geeignetes Maß für die Güte der Täuschung sein kann, da die T-Täuschungsfigur ja ebenso gut in einer anderen Größe gezeichnet werden könnte.

Die Frage lautet also: „Bei welchem Streckenverhältnis (ausgedrückt in Prozent) scheint die T-Figur aus zwei gleichlangen Strecken zu bestehen?" Ganz offenbar ist dieses Verhältnis nicht gleich 100%, sonst wäre es ja keine Täuschung! Mit diesem Wert lassen sich sogar verschiedene Längentäuschungen (zum Beispiel die T-Täuschung mit der Müller-Lyer- oder der Ponzo-Täuschung) miteinander vergleichen, wenn man das Verfahren analog auf andere Täuschungen anwendet.

Der Kongruenzbeweis (8. Jahrgangsst.)

Wozu überhaupt bewiesen werden muss, ist am ehesten einsichtig, wenn die Gültigkeit einer Behauptung nicht von vorneherein offensichtlich ist. Zur Motivation eignet sich dafür eine optische Täuschung.

An der Tafel entsteht vor den Augen der Schülerinnen und Schüler ein Parallelogramm mit einer eingezeichneten Täuschungsfigur (Abbildung 2). C und F liegen auf der Mittelsenkrechten der Parallelogrammseite [AB]. Um die Täuschung zu unterstützen, wird [CF] noch nicht eingezeichnet.

Nun stimmen die Schülerinnen und Schüler darüber ab, welche der beiden Strecken [AC] oder [BC] wohl die längere ist.

Da das Abstimmungsergebnis in der Regel nicht einheitlich ist, ergibt sich sofort die Frage nach der richtigen Antwort. Weil die Frage nach der Täuschbarkeit von prinzipieller Natur ist, kann ein einfaches Nachmessen nicht befriedigen. Als mathematisches Verfahren ist hier ein geometrischer Beweis angemessen: Zuerst wird die Hypothese als Satz formuliert und dann (in schematisierter Abfolge) bewiesen.

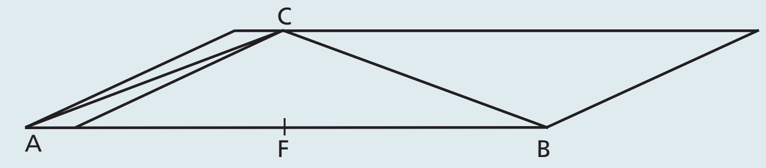


Abbildung 2: Parallelogramm mit eingezeichneter Täuschung

Satz: Wenn die Höhe $\overline{CF}$ in einem Dreieck $\triangle ABC$ eine Seite $\overline{AB}$ halbiert, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

Idee: In den beiden Dreiecken $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ sind je zwei Seiten und deren Zwischenwinkel gleich. Also sind sie nach dem SWS-Satz kongruent. Dann sind auch die dritten Seiten gleich lang.

Vor.: (1) $\overline{AF} = \overline{BF}$ (2) $\sphericalangle CFA = 90°$
Beh.: $\overline{AC} = \overline{BC}$
Bew.: $\overline{FC} = \overline{FC}$ (identisch)
$\overline{AF} = \overline{BF}$ (Vor. 1)
$\sphericalangle CFA = \sphericalangle CFB$ (Vor. 2, Nebenwinkel)

$\triangle AFC \cong \triangle BFC$ (SWS)
$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$ (entspr. Seiten) q.e.d.

Abbildung 3 : Beispiel für einen Kongruenzbeweis

Die Schülerinnen und Schüler zeichnen die etwas abgewandelte Figur in Abbildung 3 und notieren den folgenden Hefteintrag. Weil hier ein formalisiertes Verfahren vorgestellt wird, findet der Unterricht lehrerzentriert statt. Anhand dieses Beispiels kann nun das allgemeine Schema eines Kongruenzbeweises eingeführt werden.

Arbeitskärtchen zur T-Täuschung

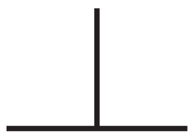
T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 8 cm.

T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 8,5 cm.

T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 9 cm.

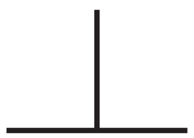
T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 9,5 cm.

T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 10 cm.

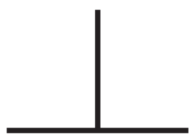


T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 10,5 cm.

T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 11 cm.



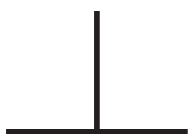
T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 11,5 cm.



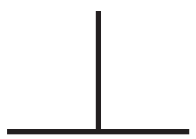
T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 12 cm.

T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 12,5 cm.

T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 13 cm.



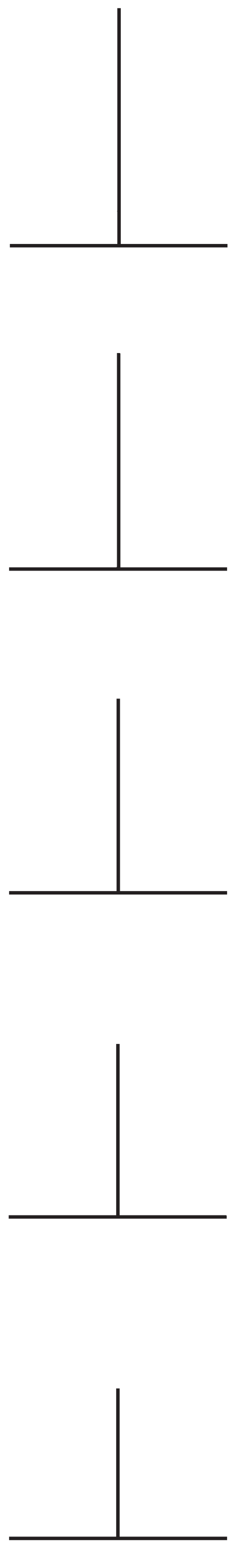
T-Täuschung
Zeichne die Figur mit dickem Filzstift auf ein einzelnes Blatt Papier. Der waagrechte Balken soll 12 cm lang sein, der senkrechte 13,5 cm.



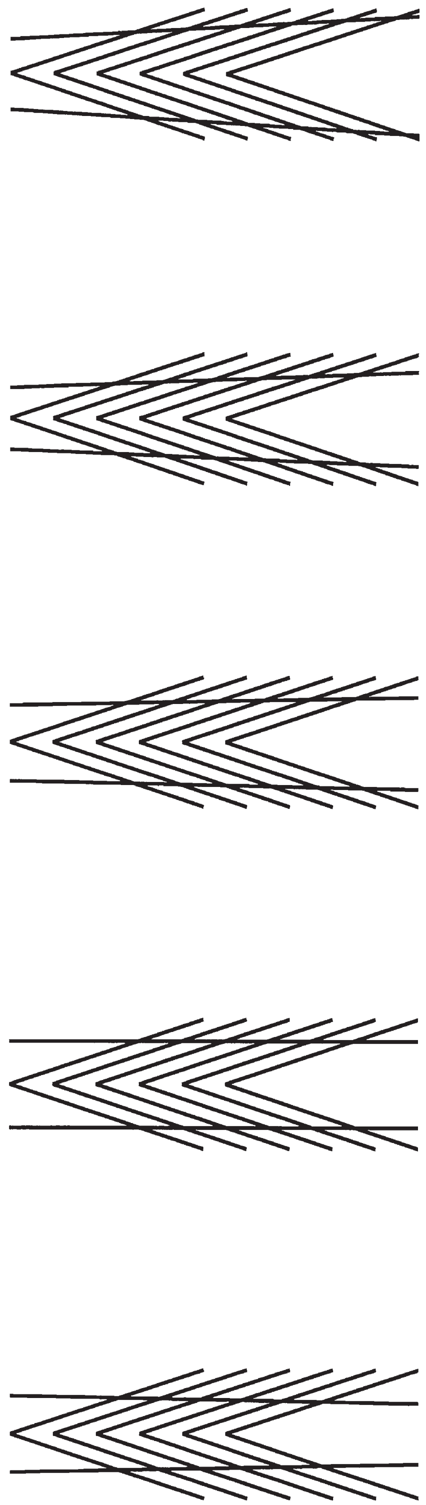
Optische Täuschungen

Aufgaben:

a) In welchem Bild erscheinen die beiden Balken der T-Täuschung gleich lang?



b) In welchem Bild erscheinen die beiden Geraden der Zöllner'schen Täuschung parallel?



c) In welchem Bild erscheinen die mittleren Kreise der Titchener-Täuschung gleich groß?